
Kholle 9, le 10 mai 2011

Exercice 1 (Question de cours)

(i) (3 pts) Énoncer le théorème de Fubini pour un rectangle.
(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Le gradient en un point est colinéaire à la droite tangente à une courbe de niveau en ce point.
2. La divergence est un opérateur linéaire.
3. Le rotationnel associe à tout champ de vecteurs différentiable dans \mathbb{R}^3 un nouveau champ de vecteurs.

Exercice 2 (3 pts) On définit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid uv = 0 \} \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) , \end{aligned}$$

avec $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = x/y$.

Soit f une fonction différentiable sur \mathbb{R}^2 . On pose $F = f \circ \Phi$. Déterminer les dérivées partielles premières de F par rapport à x et y en fonction de celles de f par rapport à u et v .

Exercice 3 (11 pts) On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathbb{R}_+^* \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ (\rho, \phi, t) &\longmapsto (\rho \sin \phi \cos t, \rho \sin \phi \sin t, \rho \cos \phi) . \end{aligned}$$

1. (2 pts) Montrer que \mathcal{S} est une bijection.
2. (4 pts) Montrer que \mathcal{S} est différentiable sur son domaine et déterminer sa différentielle.
3. (3 pts) Déterminer la divergence et le rotationnel de \mathcal{S} .
4. (2 pts) Déterminer si \mathcal{S} est un champ de gradient ?