

---

**Kholle 9, le 10 mai 2011**

**Exercice 1 (Question de cours)**

(i) (3 pts) Énoncer le théorème de Fubini pour un rectangle.  
(ii) (3 pts) Indiquer lesquels des énoncés suivants sont vrais, lesquels sont faux ? Aucune justification n'est nécessaire.

1. Le gradient en un point est colinéaire à la droite tangente à une courbe de niveau en ce point.
2. La divergence est un opérateur linéaire.
3. Le rotationnel associe à tout champ de vecteurs différentiable dans  $\mathbb{R}^3$  un nouveau champ de vecteurs.

**Exercice 2** (3 pts) On définit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid uv = 0 \} \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) , \end{aligned}$$

avec  $u(x, y) = x$  et  $v(x, y) = x/y$ .

Soit  $f$  une fonction différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ . On pose  $F = f \circ \Phi$ . Déterminer les dérivées partielles premières de  $F$  par rapport à  $x$  et  $y$  en fonction de celles de  $f$  par rapport à  $u$  et  $v$ .

**Exercice 3** (11 pts) On définit

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \mathbb{R}_+^* \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R} \\ (\rho, \phi, t) &\longmapsto (\rho \sin \phi \cos t, \rho \sin \phi \sin t, \rho \cos \phi) . \end{aligned}$$

1. (2 pts) Montrer que  $\mathcal{S}$  est une bijection.
2. (4 pts) Montrer que  $\mathcal{S}$  est différentiable sur son domaine et déterminer sa différentielle.
3. (3 pts) Déterminer la divergence et le rotationnel de  $\mathcal{S}$ .
4. (2 pts) Déterminer si  $\mathcal{S}$  est un champ de gradient ?