TD 1 : Tuna Altinel
Bat braconnier 217
Tél : 04.72.43.19.07
Courriel : altinel @ math.univ-lyon1.fr

http://math.univ-lyon1.fr/~altinel/MATHIVPrint11/mathIVprint11.html

Lien : Licence.

Distance-métrique Norme

Exercice 1 :

Soit $X \neq \emptyset$ un ensemble arbitraire.

Distance : $X \times X \to R_+$

$(x,y) \to d(x,y)$

M1 $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$.

M2 $d(x,y)=d(y,x)$

M3 $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ $\forall$ x,y,z.

d : $R \times R \to R_+$.

$(x,y) \to |x - y|$

f: $R_+ \to R_+$

FD1 $f(0)=0$

FD2 f est croissante strictement

FD3 pour tous x,y € R_+, $f(x,y) \leq f(x) +f(y)$

d distance sur un espace métrique (E,d)

d_f : $E \times E \to R_+$ M1,M2,M3.

$(x,y) \to f(d(x,y))$

- Si x = y $d_f(x,y)=f(d(x,y)) = f(0) = 0$
  Si $d_f(x,y)=f(d(x,y))=0$ comme f est strictement croissante et que $d(x,y) > 0$ quand $x \neq y$, nécessairement x = y.

- $\forall$ (x,y)€ R x R puisque $d(x,y) = d(y,x) \Leftrightarrow f(d(x,y)) = f(d(y,x))$

- Soient x,y,z € E
  $d_f(x,y) \leq d_f(x,z) + d_f(z,x)$

  $f(d(x,y)) \leq f(d(x,z) + d(z,y))$ par hypothèse

Rq : on aurait pu remplacer FD2 par « f(x) = 0 » et f est croissante.

donc on a vérifier les points M1,M2,M3 donc on a d_f est une distance.

t → t1+t   t → t

1. t = 0 → 01+0=0   t = 0 → 0 = 0

2. f'(t) = 1+t-t1+t2 > 0   f'(t) = 12t > 0

3. f(x+ y) = x+y1+x+y = x1+x+y + y1+x+y ≤ x1+x + y1+y   f(x+y) = x+y

$(x+y)^2 = x + y$

$(x + y)^2 = x + y + 2xy$

Donc f(x + y) ≤ f(x) + f(y)

Exercice 2 (Espaces normés quelques exemples)

E espace vectoriel réel.

||.|| : E → R_+
x → ||x|| N(x)

(N1) x € E ||x||= 0 ssi x = 0
(N2) pour tout λ € R, ||λ x|| = |λ| ||x||
(N3) pour tout x,y € E, ||x + y|| ≤ ||x|| + ||y||

E = R^p (p € N^*)
x € E. x = $(x_1, \ldots, x_p)$

I.

1. $||x||_2$ = i=1pxi2

(N1)

$||x||_2$ = i=1pxi2 = 0

i=1pxi2 = 0 donc ∀ i € N^*, x_i = 0.

(N2)

$||\lambda x||_2$ = i=1p(λ x$_{i)}$ ² = λ^2i=1p(x$_{i)}$ ² =|λ| i=1p(x$_{i)}$ ²

(N3)

$||x + y||_2$ = i=1p|x$_{\text{i+yi }|^2\text{=i=1p|xi2+2xi yi +yi2|}}$ =

|i=1pxi2|+|2i=1px$_{\text{i yi |+|i=1pyi2|}}$

||x||22 + 2||x||$_{\text{2||y||2 + ||y||22}}$ ≤ $||x||^2 + ||y||^2$

car t → t croissante.

$|i=1pxiyi| \leq ||x||_2 + ||y||_2 = i=1p(x_i)^2 i=1p(x_i)^2$ **(lemme de Schwartz)**

2. $||x||_{.\infty} = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$

(N1) $||x||_{.\infty} = 0$ ssi $\max_{1 \leq i \leq p} |x_i| = 0$

ssi $|x_i| = 0$ pour i € {1, ..., p}
ssi $x_i = 0$ pour i € {1, ..., p}

(N2)
Soient λ € R, x€ R^p

$||\lambda x||_{.\infty} = \max_{1 \leq i \leq p} |\lambda x_i| = \max_{1 \leq i \leq p} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$

(N3)
Soient x,y €R^p

$||x + y||_p = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i + y_i|$ pour tout i € {1, ...,p}

$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq p} (|x_i| + |y_i|) \leq \max_{1 \leq i \leq p} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq p} |y_i|$

3. $||x||_1 = i=1p|xi|$

II.
$|| \; || : \; R^2 \rightarrow R_+$

$(x,y) \rightarrow \max(|x + 3y|, |x - y|)$

(N1)

$\text{Max}(|x + 3y|,|x-y|) = 0$ ssi $|x +3y| = 0$ et $|x - y| = 0$ ssi $x + 3y = 0$
et $x - y = 0$
ssi $x = y = 0$

(N2)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}, (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $||\lambda(x,y)|| = ||(\lambda x, \lambda y)||$

$= \max(|\lambda x + 3\lambda y|, |\lambda x - \lambda y||)$

$= \max(|\lambda||x+ 3y|, |\lambda||x - y|) = |\lambda|\ ||(x,y)||$

(N3)

Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ $||(x,y) + (x',y')|| = ||(x+x', y+y')||$

$= \max(|x+x'+3y+3y'|,|x+x' - y - y'|)$

$\leq \max(|x + 3y| + |x' + 3y'|, |x - y| + |x' - y'|)$

$\leq \max(|x +3y|, |x - y|) + \max(|x' +3y'|, |x' - y'|)$

Remarque générale : Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$\text{Max}(a + b, c + d) \leq \max(a,c) + \max(b,d)$

<u>Cas 1</u> : $a \leq c$ et $b \leq d$ $\Rightarrow$ $\max(a,c) = c$, $\max(b,d) = d$

$a+b \leq c + d$ $\Rightarrow$ $\max(a+b, c+d) = c+d$

<u>Cas 2</u> : $a \leq c$ et $d \leq b$ $\Rightarrow$ $\max(a,c) = c$, $\max(b,d) = b$

$c+b \leq c + d$ et $c+b \geq a + b$ $\Rightarrow$ $\max(a+b, c+d) \leq c+b$

O

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x+3y|), |x - y|) < 1\}$

$\max(|x+3y|), |x - y|) = 1$

⇨ $|x+ 3y| = 1$ ou $|x - y| = 1$

⇨ $x + 3y = 1$ $\quad\quad$ $x - y = 1$

ou

$x + 3y = -1$ $\quad\quad$ $x - y = -1$

(1,0) = 1	(0,1/3) = 1
(0,-1) = 1	(1,0) = 1
(0,1) = -1	(0,-1/3) = -1
(-1,0) = - 1	(-1,0) = -1

III. $|| \ || : \ R^2 \to R_+$

$$(x,y) \to |ax + by| + |cx + dy|$$

Conditions suffisantes sur a,b,c,d pour que || || définisse une norme sur R^2.

(N1)

$||(x,y)|| = 0$ ssi $(x,y) = (0,0)$

$||(0,0)|| = 0$ pour tous a,b,c,d€ R

⇔ $|ax + by| + |cx + dy| = 0$

⇔ $ax + by = 0$

$cx + dy = 0$

Pour que (N1) soit satisfaite il faut et il suffit que la <u>seule</u> solution de ce système soit (0,0).

⇔ detabcd≠ 0.

⇔ $ad - bc \neq 0$.

(N2) et (N3) ne posent aucune restriction.

Exercice3 : (un espace métrique n'est <u>pas</u> nécessairement un espace normé).

E un espace normé <u>non</u> nul. Donc il existe x € E, $x \neq 0$.

(N1) ➔ $||x|| > 0$

Pour conclure, il suffit de trouver des points dans E de normes arbitrairement larges. On utilise $Rx = \{\lambda x \mid \lambda \in R\}$

$||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$, $\quad \lambda \to +\infty$ ou $\lambda \to -\infty$

Si E est borné, par définition il existe R € R_+ tel que E C B(0,R). Maintenant, soit $\lambda > R$. Alors,

$||\lambda xx|| = |\lambda|\ ||xx||$

$|\lambda| > R.$

Par conséquent, λ xx € B(0,R)

(Rq : xx est de norme 1). ||xx|| =N2

m_{i0}

1x ||x|| = 1.

<u>Conséquence :</u> Un espace normé est toujours un ensemble infini.

2/ E Ensemble non Ø.

$$d : E \times E \to R_+$$
$$(x,y) \to \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$$

<u>Exercice :</u>

Vérifier que c'est une notion de distance.

(M1, M2, M3)

(M1) d(x,y) = 0 ssi x=y

(M2)exo

(M3)exo.

Rq : C'est une distance bornée/

Elle n'est jamaisassociée à une norme

Induite par une norme

3. d : R x R → R_+

(x,y) → x-y1+x-y = f(|x – y|)

Où f : R_+ → R_+

t → t1+t

Le fait que d soit une distance sur R découle immédiatement du 1er exercice.

$\frac{t}{1+t} \leq 1$ pour $t \in R_+$

Ainsi, pour tous $x,y \in R$, $d(x,y) \leq 1$. ➔ d n'est induite pas aucune norme.

Exercice 4 : **Equivalence des normes.**

$|| \; || \sim || \; ||'$ s'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in R^*+$ tels que $\lambda_1||x|| \leq ||x||' \leq \lambda_2||x||$ pour tout $x \in E$.

$||x||_l = (\sum_{i=1}^{p}|x_i|^l)^{1/l} \sim ||x||_\infty$

$||x||_l \leq ((\max_{1\leq i\leq p} x_i)^l)^{\frac{1}{l}} = p^{\frac{1}{l}} \; ||x||_\infty$

$(\max_{1\leq i\leq p} x_i)^{\frac{1}{l}} = ||x||_\infty$

⇨ $|| \; ||_l \sim || \; ||_\infty$

E -espace vectoriel

$|| \; || \sim || \; ||'$

S'il existe $\lambda_1,\lambda_2 \in R^{+*}$ tels quepour tout $x \in E$/

$\lambda_1 ||x|| < ||x||' < \lambda_2 ||x||$

$\mathbb{R}^2$ $|| \; ||$, $|| \; ||_2$, $|| \; ||_\infty$

. . .

$|| \; || \sim || \; ||'$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ pour tout $x \in E$,

$\lambda ||x|| < ||x||' < \frac{1}{\lambda} ||x||$

$\lambda ||x||' < ||x|| < \frac{1}{\lambda} ||x||'$

$\lambda_1 ||x|| < ||x||' < \lambda_2 ||x||$

$\frac{1}{\lambda_1} ||x|| < ||x||' < \frac{1}{\lambda_2} ||x||$

λ_1, λ_2

$\frac{1}{\lambda_1} \leq \lambda_2$

$\lambda_2 \leq \frac{1}{\lambda_1}$

$\lambda_1 ||x|| < ||x||' < \lambda_2 ||x||$

$\frac{1}{\lambda_2} ||x||' < ||x||' < \frac{1}{\lambda_1} ||x||'$ (*)

On suppose « sans pertes de généralité » que $\frac{1}{\lambda_1} \leq \lambda_2$, $\lambda = \frac{1}{\lambda_2}$

Alors, (*) ➔ $\frac{1}{\lambda_2} ||x||' < ||x||' < \lambda_2 ||x||'$

$\frac{1}{\lambda_2} ||x|| < ||x||' < \lambda_2 ||x||$

$\frac{1}{\lambda_1} \leq \lambda_2$ ⇔ $\frac{1}{\lambda_2} \leq \lambda_1$

(**) ➔ $\frac{1}{\lambda_2} ||x|| < \lambda_1 ||x|| < ||x||' < \lambda_2 ||x||$.

<u>Exercice 5.</u>

L’ensemble des applications linéaires $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ avec p,q € N arbitrairement fixés, muni

de l’addition usuelle des fonctions.

u + v : x → u(x) + v(x) pour tout u,v € $L(R^p,R^q)$

et de la multiplication usuelle par les réels :

$\lambda u : x \rightarrow \lambda\, u(x)$ pour toute fonction $u \in L(R^p, R^q)$ et tout scalaire $\lambda \in R$

est un espace vectoriel. Le but de cet exercice est de le munir d'une norme.
A cet effet, on définit :

$L(R^p, R^q)$ les applications linéaires de R^p vers R^q.

R - espace vectoriel

$u,v \in L(R^p, R^q)$

$u + v : x \rightarrow u(x) + v(x)$
$\lambda u : x \rightarrow \lambda u(x)$

$\|\ \|_{R^q}$ on vérifie que si $u \in L(R^p, R^q)$

$\|\ \|_{R^p}$

$\|u(x)\|_{R^q} = \|i=1p\lambda iu(ei)\|_{R^q}$

$\leq i=1p\|\lambda iu(ei)\|_{R^q} = i=1p|\lambda i|\ \|u(ei)\|_{R^q}$

$\leq$ i=1p|λi| max1≤i≤p||u(ei)|| R^q

≤max1≤i≤p||u(ei)|| R^q i=1p|λi|

Or $||x||_1$ = ||i=1pλiei$||_1$

≤i=1p||λiu(ei)|| 1 = i=1p|λi| ||ei|| 1

≤max1≤i≤p||u(ei)|| R^q x1 ≤α max $||u(e_i)||$ R^q ||x|| R^p

Comme toutes les normes dans R^p sont équivalentes, il existe α € R^{+*} tel que

$||x||_1 \leq x\ ||x||_{R^p}$

i=1p|λi| mi

$m_i \geq 0$ pour chaque i

$|\lambda_i|\ m_i \leq |\lambda_i|\ \max m_i N2$
m_{i0}

$i=1p|\lambda i|\ mi \leq i=1p|\lambda i|\ \max mi$

u est application continue si ε € R^{+*}, il existe δ € R^{+*} tel que si $||x - x_0||_{R^p} < \delta$

alors $||u(x) - u(x_0)||_{R^q} < \varepsilon$

$||u(x) - u(x_0)||_{R^q} = ||u(x - x_0)||_{R^q} \leq M\ ||x - x_0||_{R^p}$

Alors $||u(x) - u(x_0)||_{R^{q}} \leq M\ ||x - x_0||_{R^p} < M\ \varepsilon M$