Devoir à la maison

Ce devoir, que nous vous conseillons vivement d'aborder, est néanmoins complètement facultatif. Il a pour but d'approfondir vos connaissances en calcul différentiel. Pour ceux qui auront la volonté de l'aborder, la date limite est le 25 mai 2010. Nous leur demandons de mettre leurs réponses dans les boites à lettres de leur responsable de travaux dirigés. Ces boites sont dans une salle sur votre droite quand vous entrez dans l'amphi Jordan de la porte ouest (celle à gauche quand l'amphi est devant vous, donc à votre nord).

Hessienne en dimension supérieure

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $\mathrm{d}^2 f : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ par : pour tout $(X,Y,Z) \in (\mathbb{R}^n)^3$,

$$\mathrm{d}^2 f(X)(Y,Z) \;=\; ([\mathrm{d}(\mathrm{d}f)](X)\cdot Y)\cdot Z \;.$$

Rappelons que $\mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ est l'espace des formes bilinéaires à valeurs réelles. Dans la notation de l'exercice 4 de la fiche 4, $n_1 = n_2 = n$ et $p = 1$.

1. Montrer, pour tout $(X,Y,Z) \in (\mathbb{R}^n)^3$, que

$$\mathrm{d}^2 f(X)(Y,Z) \;=\; <\mathrm{Hess}(f)(X)\,Y, Z>$$

   et que

$$\mathrm{d}^2 f(X)(Y,Z) \;=\; \mathrm{d}^2 f(X)(Z,Y)\;.$$

2. Montrer que, pour tout $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$f(X+Y) \overset{Y\to 0}{=} f(X) \;+\; \mathrm{d}f(X)(Y) \;+\; \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(X)(Y,Y) \;+\; \mathrm{o}\left(\|Y\|^2\right)\;.$$

3. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(X_0) = 0$.
   (a) Justifier pourquoi les valeurs propres de $\mathrm{Hess} f(X_0)$ sont réelles.
   (b) Montrer que si $\mathrm{Hess} f(X_0)$ possède une valeur propre strictement positive (respectivement négative), alors f n'admet pas de maximum (respectivement minimum) local en X_0.
   (c) Montrer que si toutes les valeurs propres de $\mathrm{Hess} f(X_0)$ sont strictement positives (respectivement négatives), alors f admet un minimum (respectivement maximum) local en X_0. (*Indication* : diagonaliser en une base orthonormée.)
   (d) Montrer qu'il existe des couples (f, X_0) tels que $\mathrm{Hess} f(X_0)$ possède une valeur propre nulle correspondant à chacun des cas suivants :
      – f possède un minimum local en X_0 ;
      – f possède un maximum local en X_0 ;
      – f ne possède pas d'extremum local en X_0.
      (*Indication* : pensez aux exemples les plus simples que vous avez déjà rencontrés dans vos cours sur les fonctions d'une seule variable.)
   (e) Dans le cas où $n = 2$, caractériser les hypothèses sur les valeurs propres des trois dernières questions à l'aide de la trace et du déterminant de $\mathrm{Hess} f(X_0)$.