UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Luis-Miguel Rodrigues

Math IV, Analyse (Printemps 2010) – Fiche 1

1 mars 2010

Exercice 1 (De nouvelles distances à partir des anciennes).
Soient (E, d) un espace métrique et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de domaine $\mathbb{R}_+$ et qui satisfait les conditions suivantes :

FD1 $f(0) = 0$;

FD2 f est une fonction strictement croissante ;

FD3 pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Montrer que la fonction suivante munit E d'une nouvelle notion de distance.

$$\begin{array}{cccc} d_f & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & f(d(x, y)) \; . \end{array}$$

Montrer que les lois

1. $t \mapsto \frac{t}{1+t}$,
2. $t \mapsto \sqrt{t}$

définissent dans $\mathbb{R}_+$ des fonctions qui satisfont les conditions FD1, FD2, FD3.

Exercice 2 (Un espace métrique n'est pas nécessairement un espace normé).

1. Montrer que si $(E, || \; ||)$ est un espace normé non réduit à $\{0\}$, alors E n'est pas borné, en d'autres termes pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \in E$ tel que $||x|| \geq r$.
2. Montrer que tout ensemble E non vide peut être muni d'une métrique. En conclure, en explicitant un exemple, qu'il existe un ensemble E et une métrique dans E qui n'est induite par aucune norme.
3. Montrer que la fonction suivante définit une métrique dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cccc} d & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \end{array}$$

Montrer que cette métrique n'est induite par aucune norme dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Normes équivalentes dans $\mathbb{R}^p$).
Nous nous mettons dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et considérons les trois applications de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ définies pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} x_j^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|, \qquad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{p} |x_j|.$$

1. Vérifier que ces applications définissent des normes.
   (*Pour vérifier que* $\| \ \|_2$ *satisfait l'inégalité triangulaire, vous pouvez vous servir sans preuve du* ***lemme de Schwartz*** *:*

$$\textit{pour tous} \ \ (a_1, \ldots, a_p) \ , \ \ (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p \ , \ \left| \sum_{i=1}^{p} a_i b_i \right| \ \le \ \sqrt{\sum_{i=1}^{p} a_i^2} \ \sqrt{\sum_{i=1}^{p} b_i^2} \ . \,)$$

2. Dessiner la boule unité B_j de centre $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\| \ \|_j$ pour $j \in \{2, \infty, 1\}$.
3. Montrer que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 4 (Exemples de normes).
1. Vérifier que la fonction

$$\begin{array}{cccc} || \ || & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x,y) & \longmapsto & |x+y| + |x| \end{array}$$

définit une norme dans $\mathbb{R}^2$.

2. Dessiner la boule ouverte unité de centre $(0,0)$ par rapport à cette norme.

3. Déterminer des conditions suffisantes que les constantes a, b, c, d doivent vérifier pour que la fonction

$$\begin{array}{cccc} || \ || & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x,y) & \longmapsto & |ax+by| + |cx+dy| \end{array}$$

définisse une norme dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (Nature topologique de parties d'un espace métrique).

1. Montrer que toute partie finie d'un espace métrique (E, d) est fermée. Montrer que la même conclusion n'est pas nécessairement vraie quand on remplace "fermée" par "ouverte".
2. Donner un exemple d'espace métrique dont toute partie finie est ouverte. Montrer que dans un tel espace toute partie, finie ou infinie, est à la fois ouverte et fermée.
3. Etablir si les ensembles suivants dans $(\mathbb{R}, | \ |)$ sont ouverts, fermés. Déterminer également les points intérieurs et adhérences de ces ensembles : $\mathbb{N}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, \ 1 - \frac{1}{n}]$.

Exercice 6 (Notion de voisinage).
Soit x un point de $\mathbb{R}^p$. On dit qu'une fonction f vérifie une certaine propriété *dans un voisinage de* x si cette propriété est satisfaite dans un ensemble ouvert contenant x. Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont positives dans un voisinage de l'origine :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Etablir si les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont définies dans un voisinage de l'origine :

$$f(x,y) = \sqrt{x+y+1}, \qquad f(x,y) = \ln\big(\sin(x^2+1)\big).$$