UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel, Luis-Miguel Rodrigues

Math IV, Analyse (Printemps 2010) – Fiche 2

8 mars 2010

Exercice 1 (Lignes de niveau).
Soit $\omega > 0$. Déterminer les lignes de niveaux de la fonction

$$f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ,\quad (p,q) \longmapsto \frac{p^2}{2}\ -\ \omega^2\ \cos(q)\ .$$

On cherchera à les écrire comme réunion de graphes de fonctions d'une variable.

Exercice 2 (Limites : exemples).
Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point arbitraire. Calculer, lorsque la limite existe,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\ ,$$

pour les fonctions suivantes :

1.
$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1,x_2) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2} & \text{si } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{cccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 (Limites en divers points de $\mathbb{R}^2$).
Déterminer les limites suivantes quand elles existent :

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+y)}{(x+y)^2-1}\ \ ;\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{1/3}y^2}{x^2+y^2+|x-y|}\ \ ;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^2}\ \ ;\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y\ .$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

où la fonction f est définie sur $\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ |\ x \neq y^2\ \}$ par la loi

$$(x,y)\ \mapsto\ \frac{x^2-y}{x-y^2}\ ,$$

pour les valeurs suivantes de (a, b) : $(1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, -1)$.

(c)

$$\lim_{||(x,y)|| \to +\infty} \frac{x \arctan y}{x^2 + y^2 + 1} \quad ; \quad \lim_{||(x,y)|| \to +\infty} \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2} \quad ; \quad \lim_{||(x,y)|| \to +\infty} (1 + |x| + |y|) \sin(y^2) \; .$$

(*Le choix de la norme n'est pas précisé puisqu'elles sont toutes équivalentes sur* $\mathbb{R}^2$).

Exercice 4 (Limites suivant divers chemins).
On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = 0. \end{cases}$$

1. Étudier, pour tout $m \in \mathbb{R}$, la limite quand $(x, y) \to (0, 0)$ de la restriction de f à la droite d'équation $y = mx$,
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation $y = x^2$,
3. Montrer que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 5 (Limites, entraînement).
Pour toute fonction f de deux variables on considère trois types de limites en un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(A) \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y); \quad (B) \lim_{x \to a} (\lim_{y \to b} f(x, y)); \quad (C) \lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x, y)).$$

On s'intéresse désormais aux applications suivantes :

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad f_3(x, y) = \frac{\sin x}{y}, \quad f_4(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Pour chaque application, déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel elle est bien définie, et montrer ensuite sur ces exemples qu'en $(0, 0)$:

1. deux de ces trois limites peuvent exister sans que la troisième existe ;
2. une de ces trois limites peut exister sans que les deux autres existent ;
3. (B) et (C) peuvent exister sans être égales ;
4. si (A) et (B) existent alors elles sont égales.