UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel, Luis-Miguel Rodrigues

Math IV, Analyse (Printemps 2010) – Fiche 3

15 mars 2010

Exercice 1 (Topologie en se servant de la continuité).

1. Déterminer rigoureusement si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, compacts, connexes par arc :
$$A = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x| < |y| < 1 \ \}$$
$$B = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0 \ \}$$
2. Trouver un exemple de fonction continue f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et de partie ouverte $U \subset \mathbb{R}$, telles que $f(U)$ ne soit pas ouvert.
3. Trouver un exemple de fonction continue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et de partie fermée $F \subset \mathbb{R}$, telles que $g(F)$ ne soit pas fermé.
4. Trouver un exemple de fonction continue $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et de partie compacte $K \subset \mathbb{R}$ telles que $h^{-1}(K)$ ne soit pas compact.

Exercice 2 (Dérivées partielles, la matrice jacobienne).
On définit f_1 et f_2 de la façon suivante :

$$f_1 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{x_1^4 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

$$f_2 \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & \sin(x_1 x_2) \end{array}$$

On définit alors

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) \end{array}$$

1. Déterminer les dérivées partielles premières de f_1 et de f_2 en tous les points de $\mathbb{R}^2$ où elles sont définies. Expliciter ces dérivées partielles comme des fonctions de leurs domaines dans $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la jacobienne de f en un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
3. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Divers aspects d'une fonction de plusieurs variables).
Voici la définition d'une fonction de plusieurs variables suivie des questions pour éveiller les esprits :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(|xy|) \end{array}$$

1. Tracer les lignes de niveau

$$\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0 \ \} \ , \ \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 1 \ \} \ .$$

2. Déterminer les dérivées partielles premières de f.
3. Vérifier si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (Entraînement : continuité).
On fixe $\alpha_1, \ \alpha_2 \in \mathbb{R}^*, \ \beta_1, \ \beta_2, \ \gamma \ \in \mathbb{R}_+^*$ et définit la fonction

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\gamma}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Montrer que la fonction f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \gamma$.

Exercice 5 (Entraînement : calculs simples d'arc ; topologie).

1. On définit
$$S = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||(x,y)||_\infty = 1 \ \} \ .$$
Trouver une application continue γ de l'intervalle $[0,1]$ vers S telle que $\gamma(0) = (0,-1)$ et $\gamma(1) = (1,0)$.
2. On définit
$$D = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1 \ \} \cup \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+1)^2 = 1 \ \} \ .$$
Nous fixons deux points dans D : $P_0 = (1,1)$ et $P_1 = (-1,-1)$. Trouver un arc continu γ de l'intervalle $[0,1]$ vers S telle que $\gamma(0) = P_0$ et $\gamma(1) = P_1$. (*Vous pouvez utiliser les coordonnées polaires.*)
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On note l sa limite. Montrer que l'ensemble $\{u_n \mid n \in N\} \cup \{l\}$ est compact.