UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Luis-Miguel Rodrigues

Math IV, Analyse (Printemps 2010) – Fiche 4

29 mars 2010

Dans cette fiche, pour insister sur la structure matricielle, on notera $A \cdot B$ le produit matriciel de matrices (ou de vecteurs) A et B. À cet usage, on rappelle l'identification de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$).

Exercice 1 (Connexité par arcs).

Soit Ω connexe par arcs et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(\Omega) \subset \{0, 1\}$. Montrer que f est constante.

Exercice 2 (Fonctions Lipschitziennes).

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ayant choisi une norme $\|\cdot\|$, pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, on dit que f est k-Lipschitzienne si, pour tout $(x, y) \in \Omega^2$,

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; k\;\|x - y\|\ .$$

On suppose Ω convexe – c'est-à-dire que, pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, on a $[x, y] \subset \Omega$ – et f de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \Omega^2$,

$$f(y) - f(x) \;=\; \int_0^1 \mathrm{d}f\,(x + t\,(y - x)) \cdot (y - x)\;\mathrm{d}t\ .$$

2. On suppose de plus que $\mathrm{d}f : \Omega \to \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est bornée par $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ étant muni de la norme $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ subordonnée à $\|\cdot\|$. Montrer que f est k-Lipschitzienne.

Exercice 3 (Dérivées directionnelles).

On définit

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array} .$$

1. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet en $(0, 0)$ des dérivées directionnelles dans toutes les directions de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 4 (Formes bilinéaires).

1. Soit $(n_1, n_2, p) \in (\mathbb{N}^\star)^3$ et $b : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^p$ bilinéaire. Montrer que, pour tout (X_1, X_2), $(Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, on a

$$\mathrm{d}b\,((X_1, X_2)) \cdot ((Y_1, Y_2)) \;=\; b(X_1, Y_2) \;+\; b(Y_1, X_2)\ .$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et l'on définit
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto < X, BX > \ .$$
Déterminer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^n$.
3. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ et $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. On définit
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto A(t) \cdot Y(t) \ .$$
Donner la dérivée de f en tout point.

Exercice 5 (Entraînement : globe et planisphère).

On définit
$$f : [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3, \quad (\theta, \varphi) \mapsto (\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$
et
$$g : \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \left(-\frac{2x}{z-1}, -\frac{2y}{z-1} \right) \ .$$
Déterminer le domaine de définition et calculer la différentielle de $g \circ f$.

Exercice 6 (Entraînement : dérivées partielles non continues).

On définit
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \ .$$

1. Montrer que les dérivées partielles de f sont définies partout sur $\mathbb{R}^2$ mais qu'elles ne sont pas continues à l'origine.
2. Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.