UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Luis-Miguel Rodrigues

# Math IV, Analyse (Printemps 2010) – Fiche 5

**26 avril 2010**

**Exercice 1 (Composons).**
**I.** On définit les deux fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x^2+y^2+2z^2, x^2-y^2) \end{array} \quad ; \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (\sqrt{u}, \sqrt{u^2+3v^2}, \sqrt{v+2}) \end{array} .$$

1. Déterminer les domaines $D_f$ et $D_g$ de $f$ et de $g$ respectivement. En déduire le domaine de $f \circ g$, noté ci-après $D_{f\circ g}$.
2. Déterminer les plus grandes parties de $D_f$ et de $D_g$ sur lesquelles $f$ et $g$ sont différentiables. Ecrire leurs Jacobiens.
3. Déterminer la plus grande partie de $D_{f\circ g}$ où $f \circ g$ est différentiable. Ecrire son Jacobien.

**II.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. On pose $h(u,v) = f(\sin u + \cos v)$. Montrer que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\ \sin v \ + \ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\ \cos u \ = \ 0 \ .$$

**III. (Entraînement)** Soient $y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en tous les points de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement. On pose $h(x) = f(x, y(x, z(x)), z(x))$. Vérifier l'identité suivante :

$$\begin{aligned} h'(x) \ = \ & \partial_1 f(x, y(x,z(x)), z(x)) \ + \\ & \partial_2 f(x, y(x,z(x)), z(x))\ [\partial_1 y(x,z(x)) + \partial_2 y(x,z(x))\ z'(x)] \ + \\ & \partial_3 f(x, y(x,z(x)), z(x))\ z'(x) \ . \end{aligned}$$

**Exercice 2 (Différentielles d'ordre supérieures).**
On définit :

$$P : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,t) & \longmapsto & (r\cos t, r\sin t) \end{array} .$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ en tout point de $\mathbb{R}^2$. On pose $F = f \circ P$. Déterminer les dérivées partielles secondes de $F$.

**Exercice 3 (Formule de Taylor).**

1. Vérifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leurs domaines de définition, ensuite déterminer leurs formules de Taylor aux voisinages des points données :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \arctan\left(\frac{1+x}{1-y}\right) \end{array} \ ; \quad \text{en } (0,0)$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{e^x}{\cos(x-y)} \end{array} \ ; \quad \text{en } (2,2)$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & e^x \sin(x+y) \end{array} \ ; \quad \text{en } (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y \end{array} \ . \quad \text{en } (1,0)$$

2. Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 3 en $(1,1)$ de la fonction définie par
$$f(x,y) = x\ln y - y\ln x\ .$$

**Exercice 4 (Extréma locaux/globaux).**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extréma locaux de la fonction $f$.
2. La fonction $f$ possède-t-elle des extréma globaux sur $\mathbb{R}^2$ ?
3. Représenter le segment de droite $L$ défini par
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -2 \le x \le 0,\ y = x+1\}$$
et déterminer les extréma globaux de la restriction de $f$ à $L$ en précisant en quels points de $L$ ils sont atteints.

**Exercice 5 (Extréma locaux/globaux).**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les extréma locaux de $f$.
2. A l'aide des coordonnées polaires, vérifier que $f(x,y) \le 2r^2 - \frac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x,y) \le 4$.
3. Trouver le maximum global de $f$ et les points où il est atteint.
4. Y a-t-il un minimum global ?

**Exercice 6 (Extréma sur un compact).**
Déterminer la borne supérieure de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x,y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$
sur le compact $K = [-1,1] \times [-1,1]$.

**Exercice 7 (Extréma liés, multiplicateurs de Lagrange).**
(1) Soient $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $D = \{(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid x_1 + \ldots + x_n = s\}$. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \ldots x_n$. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur maximale atteinte par $f$ sur l'ensemble $D$.

(2) En déduire que, pour tous $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'inégalité : $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

**Exercice 8 (Extréma liés, entraînement).**
On définit la fonction
$$\begin{array}{rccc} h & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & e^{(x^2+y^2-4)^2} \end{array}.$$

1. Déterminer les points critiques de la fonction $h$ ainsi que la nature de ces points.
2. On considère le domaines $D$ de $\mathbb{R}^2$ défini par la relation
$$D \ = \ \left\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \le 1 \right\} \quad .$$

Montrer que le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2 est inclus dans $D$, puis déterminer les extréma de $h$ sur le domaine $D$.