UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Luis-Miguel Rodrigues

Math IV, Analyse (Printemps 2010) – Fiche 6

3 mai 2010

Exercice 1 (Extrema liés et gravité).

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note $D = \left\{ X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, X_2 \geq h(X_1) \right\}$. Soit $m, g > 0$. On définit

$$H : \begin{array}{ccc} D \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\ , \\ (X, Y) & \mapsto & \frac{m}{2}\|Y\|^2 + mgX_2\ . \end{array}$$

On suppose par ailleurs que h' et h'' ne s'annulent pas simultanément.

1. Montrer que H ne possède pas de maximum local.
2. Caractériser les minima locaux de H à l'aide de h.

Exercice 2 (Ellipse et droite : extrema liés).

On note $\mathcal{E} = \left\{ X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$ et $\mathcal{D}$ la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0, 4)$ et $(2, 3)$.

1. Montrer qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$I := \inf_{(X,X') \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}} \|X - X'\| = \inf_{(X,X') \in \mathcal{E} \times (\mathcal{D} \cap K)} \|X - X'\|\ .$$

   En déduire qu'il existe $(X_\mathcal{E}, X_\mathcal{D}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}$ tel que $\|X_\mathcal{E} - X_\mathcal{D}\| = I$.

2. Soit $(X_\mathcal{E}, X_\mathcal{D}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}$ un tel point.
   (a) Montrer que
   $$\inf_{X' \in \mathcal{D}} \|X_\mathcal{E} - X'\|^2 = \|X_\mathcal{E} - X_\mathcal{D}\|^2$$
   et en déduire une équation sur $(X_\mathcal{E}, X_\mathcal{D})$.
   (b) Montrer que
   $$\inf_{X \in \mathcal{E}} \|X - X_\mathcal{D}\|^2 = \|X_\mathcal{E} - X_\mathcal{D}\|^2$$
   et en déduire une équation sur $(X_\mathcal{E}, X_\mathcal{D})$.
   (c) Déterminer $(X_\mathcal{E}, X_\mathcal{D})$.

Exercice 3 (Ellipse et droite : paramétrisation).

On note $\mathcal{E} = \left\{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$ et $\mathcal{D}$ la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0,4)$ et $(2,3)$.

1. Donner $\gamma_{\mathcal{E}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 1-périodique et $\gamma_{\mathcal{D}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ injective telles que $\gamma_{\mathcal{E}}(\mathbb{R}) = \mathcal{E}$ et $\gamma_{\mathcal{D}}(\mathbb{R}) = \mathcal{D}$. On définit alors
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (t,t') \mapsto \|\gamma_{\mathcal{E}}(t) - \gamma_{\mathcal{D}}(t')\|^2 \ .$$
2. Montrer qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^2$ tel que
$$\inf_K F \ = \ \inf_{\mathbb{R}^2} F \ .$$
En déduire qu'il existe $(t,t') \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(t,t') = \inf_K F$.
3. Déterminer l'ensemble des tels (t,t').
4. En déduire l'ensemble des $(X,X') \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}$ tels que
$$\|X_{\mathcal{E}} - X_{\mathcal{D}}\| \ = \inf_{(X,X') \in \mathcal{E} \times \mathcal{D}} \|X - X'\| \ .$$