UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Luis-Miguel Rodrigues

Math IV, Analyse (Printemps 2010) – Fiche 7

10 mai 2010

Exercice 1 (Divergence).
Nous commençons par décrire le contexte de cet exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note $(0, e_1, \cdots, e_n)$ le repère affine canonique de $\mathbb{R}^n$. En d'autres termes, V est un champ de vecteurs. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$. Soit X_0, X_1, $\cdots$, $X_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = V(X(t))$$

et vérifiant $X_0(0) = x_0$ et, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $X_j(0) = x_0 + \varepsilon e_j$. On définit alors

$$\begin{array}{rcccl} D_\varepsilon & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \det\big((X_j(t) - X_0(t))_{j \in [\![1,n]\!]}\big) \ . \end{array}$$

L'objectif de cet exercice est d'expliciter le lien entre la variation de volume décrit par le repère $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ et la divergence de V.

1. **(Détour ; vous pouvez aborder directement le point suivant)** Ce premier point a pour but de déterminer la différentielle de l'application qui, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, associe à chaque matrice $n \times n$ à entrées réelles son déterminant :

$$\begin{array}{rcccl} \det & : & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & X = (x_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]} & \longmapsto & \det(X) \ . \end{array}$$

   C'est une application de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n^2})$ (pourquoi ?).
   – Soit $X \in \mathcal{M}_{n,n}$. Montrer que
   $$\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(X) = X^{ij} \ ,$$
   où X^{ij} est le ij-ième cofacteur de X.
   – Déduire que pour toutes matrices $X, H \in \mathcal{M}_{n,n}$
   $$(\mathrm{d}\ \det)(X).H \ = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} X^{ij} h_{ij} \ = \ \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(X)\ H)$$
   où $\mathrm{com}(X)$ est la matrice des cofacteurs de X.
2. Calculer $D'_\varepsilon(0)$. Dans les calculs invoquant la différentielle du déterminant vous pouvez utiliser le point précédent ou l'exercice 4 de la fiche 4.
3. En déduire que
$$\mathrm{div}(V)(x_0) \ = \ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{D'_\varepsilon(0)}{D_\varepsilon(0)} \ .$$

Exercice 2 (Rotationnel).
L'objectif de cet exercice est de donner une interprétation géométrique du rotationnel.

1. Soit $\omega \in \mathbb{R}^+$ et $x_0 \in \mathbb{R}^3$. On définit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t)$ est l'image de x_0 par la rotation d'axe $e_3 = (0, 0, 1)$ et d'angle ωt. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$X'(t) \; = \; \omega e_3 \wedge X(t) \; .$$
2. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^3$. On définit $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, X \to \Omega \wedge X$. Montrer que $\mathrm{rot}(V)$ est constant, égal à 2Ω. Faire le lien avec le point précédent.
3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$.