UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
Institut Camille Jordan

Travaux dirigés:
Tuna Altınel, Luis-Miguel Rodrigues

Math IV, Analyse (Printemps 2010) – Fiche 8

17 mai 2010

Exercice 1 (Intégration et dérivation).

1. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que l'on ait, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \;=\; x^2 \;+\; \sin(x + y) \;+\; xy^2 \;-\; y^2 \;.$$
2. Montrer que deux telles fonctions f et g vérifient, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(b, y, z) - f(a, y, z) \;=\; g(b, y, z) - g(a, y, z) \;.$$

Exercice 2 (Intégrales doubles et Fubini).
Calculer les intégrales suivantes :

$$\iint_D (x - y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ ,\ D \text{ étant le domaine compact de } \mathbb{R}^2 \text{ délimité}$$

par les courbes d'équations respectives $x = 0\ ,\ y = x + 2\ ,$ et $y = -x$;

$$\iint_D x\cos(y)\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ ,\ \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x \le \sin(y)\ ,\ 0 \le y \le \pi/2\}\ ;$$

$$\iint_D xy\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ ,\ \text{où } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \le 1\ ,\ x + \sqrt{3}y \le 1\}\ .$$

Expliciter chaque usage du théorème de Fubini.

Exercice 3 (Intégrales triples et Fubini).
Calculer les intégrales suivantes :

$$\iiint_D xyz\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}z\ ,\ \text{où } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}\ ;$$

$$\iiint_D x^2 y\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}z\ ,\ \text{où } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \le y \le 1 - x^2\ ,\ |x + y + z| \le 1\}\ ;$$

$$\iiint_D e^{x+y+z}\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}z\ ,\ \text{où } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0\ ,\ z \ge 0\ ,\ x + y + z \le 1\}\ .$$

Expliciter chaque usage du théorème de Fubini.

Exercice 4 (Changement de variables).

1. Soit $a > 1$ et $b > 1$. Calculer l'aire de la région compacte de $\mathbb{R}^2$ délimitée par les courbes d'équations respectives
$$y = ax\ ,\ y = x/a\ ,\ y = b/x\ , y = 1/bx\ .$$

2. Calculer l'intégrale suivante :

$$\iint_D (x+y)\ \ \mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}y\ ,\ \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 5\ ,\ x+y+3 \geq 0\}\ .$$

Indication : utiliser une rotation.

3. Calculer l'intégrale

$$\iiint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ ,$$

où D est l'ensemble des points intérieurs à la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1, et extérieurs au cône de révolution autour de l'axe des z (troisième coordonnée) et d'angle $\pi/3$.

4. Soit $R > 0$ et $0 < R' < R$. Calculer le volume du domaine compact D de $\mathbb{R}^3$, délimité par une sphère de rayon R et un cylindre de révolution de rayon $R' > 0$ ayant pour axe un diamètre de la sphère, et contenant le centre de la sphère.

5. (**Entraînement**) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer l'intégrale

$$\iiint_D (ax+by+cz)^2\ \ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ ,$$

où D est la boule de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1.

Exercice 5 (Sans Fubini).
Montrer que les intégrales suivantes ne sont pas égales :

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \qquad\qquad \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x\ ,$$

et expliquer pourquoi le théorème de Fubini n'est pas applicable.

Indication : commencer par calculer les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\,\arctan(x))\ .$$