UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Luis-Miguel Rodrigues

Math IV, Analyse (Printemps 2010) – Fiche 9

31 mai 2010

Exercice 1 (Théorème des fonctions implicites).
On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{x+y} \cosh(x + y) - \sin(x)$.

1. Montrer qu'il existe deux intervalles I et J tels que $0 \in \mathring{I}$, $0 \in \mathring{J}$ et une courbe Γ de $\mathbb{R}^2$ telle que, pour tout $(x, y) \in I \times J$,
$$f(x, y) = 1 \text{ si et seulement si } (x, y) \in \Gamma \ .$$
2. Montrer que, quitte à restreindre les intervalles I et J, on peut supposer qu'il existe $\varphi : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tel que, pour tout $(x, y) \in I \times J$,
$$(x, y) \in \Gamma \text{ si et seulement si } y = \varphi(x) \ .$$
3. Donner un développement à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0.

Exercice 2 (Inititation à l'analyse complexe).
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $R > 0$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto (x + iy)^n$. Calculer l'intégrale $\int_S f := \int_S \Re(f) + i \int_S \Im(f)$ où S est le cercle centré en l'origine, de rayon R, paramétré dans le sens direct.

Exercice 3 (Spirale logarithmique).
Soit $a > 0$. On définit la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (e^{at} \cos t, e^{at} \sin t) \ . \end{array}$$

1. Donner en tout de point de $\gamma(\mathbb{R})$ une équation de la tangente à $\gamma(\mathbb{R})$, ainsi qu'un paramétrage de cette tangente.
2. Montrer que $\gamma(t) \mapsto (0, 0)$ quand $t \mapsto -\infty$.
3. Montrer que la longueur de l'arc $\gamma([t, 0])$ a une limite finie quand $t \mapsto -\infty$.
4. Montrer qu'en tout de point de $\gamma(\mathbb{R})$ la tangente à $\gamma(\mathbb{R})$ forme un angle constant avec la droite joignant ce point à l'origine.

Exercice 4 (Hélice).
Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^\star$. On définit la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rcccl} \gamma & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \longmapsto & (\cos(\omega t), \sin(\omega t), t) \ . \end{array}$$

1. Donner en tout point de $\gamma(\mathbb{R})$ un système d'équations pour la tangente à $\gamma(\mathbb{R})$, ainsi qu'un paramétrage de cette tangente.

2. Donner en tout de point de $\gamma(\mathbb{R})$ une équation du plan normal à $\gamma(\mathbb{R})$, ainsi qu'un paramétrage de ce plan.
3. Calculer en tout point de $\gamma(\mathbb{R})$ l'angle formé par la tangente avec la verticale.
4. Calculer en tout point de $\gamma(\mathbb{R})$ l'angle formé par la tangente avec la droite joignant ce point à son projeté orthogonal sur l'axe vertical.
5. Calculer pour tout $a \in \mathbb{R}$ la longueur de $\gamma([a, a + \frac{2\pi}{\omega}])$.

Exercice 5 (Divergence et rotationnel).
On note $\Omega = [0,1]^2$.

1. Donner $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continue, injective sur $]0,1[$ tel que
   - $\gamma([0,1]) = \partial\Omega$;
   - $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma(1/4) = (1,0)$, $\gamma(1/2) = (1,1)$, $\gamma(3/4) = (0,1)$ et $\gamma(1) = (0,0)$;
   - γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]\backslash\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ avec, pour tout $t \in [0,1]\backslash\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$, $\gamma'(t) \neq (0,0)$.
2. On définit alors
$$T_\gamma : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)\} \\ \frac{\gamma'(\gamma^{-1}(x))}{\|\gamma'(\gamma^{-1}(x))\|} & \text{sinon} \end{cases}$$
et $N_\gamma = \Pi \circ T_\gamma$ où Π est la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre l'origine. Montrer que, si $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\varphi(0) = 0$, alors $T_\gamma = T_{\gamma\circ\varphi}$.
3. Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que
$$\int_{\partial\Omega} < V, N > = -\int_\Omega \operatorname{div}(V) .$$
4. Soit $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. On note $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (x,y,0)$ l'injection canonique. Montrer que
$$\int_{\partial\Omega} < V \circ i, i \circ T > = -\int_\Omega < \operatorname{rot}(V) \circ i, e_3 >$$
où e_3 est le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (Problème : paramétrage par la longueur d'arc).

1. Soit $n \in \{2,3\}$. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et L la longueur de $\gamma([0,1])$. Montrer que l'on peut définir (de manière unique)
$$\widetilde{\gamma} : [0,L] \to \mathbb{R}^n,\ l \mapsto \gamma(t) \text{ où } t \text{ vérifie } \int_{\gamma_{|[0,t]}} 1 = l .$$
2. On suppose dorénavant de plus que $\|\gamma'\|$ ne s'annule pas. Montrer que $\widetilde{\gamma}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que, pour tout $l \in [0,L]$, la longueur de $\widetilde{\gamma}([0,l])$ est l. *Indication :* étudier $[0,1] \to [0,L], t \mapsto \int_{\gamma_{|[0,t]}} 1$ et son inverse.
3. On suppose en outre que γ est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $\widetilde{\gamma}$ est également de classe $\mathcal{C}^2$ et que, pour tout $l \in [0,L]$, $\widetilde{\gamma}'(l)$ et $\widetilde{\gamma}''(l)$ sont orthogonaux. *Indication :* exploiter que, pour tout l, $\|\widetilde{\gamma}'(l)\|^2 = 1$.