UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Theresia Eisenkoelbl

Géométrie élémentaire (Automne 2010) – Fiche 1

21 septembre 2010

Exercice 1 (Exemples d'espaces affines).

1. Soient deux espaces vectoriels V et W, $l : V \longrightarrow W$ une application linéaire et $\vec{b} \in W$. Montrer que l'ensemble des solution linéaires de l'équation
$$l(\vec{x}) \;=\; \vec{b}\ ,$$
s'il n'est pas vide, est un espace affine. Déterminer sa direction.
2. Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. L'ensemble des applications $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ qui sont solutions de l'équation
$$a_n \frac{d^n}{dx^n}\phi \;+\; a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\phi \;+\; \dots a_0\phi \;=\; \psi$$
est-il un espace affine ? Dans l'affirmative, quelle est sa dimension ?
3. Soient $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$ et $b \in \mathbb{R}$. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels vérifiant
$$u_{n+k} \;+\; a_{k-1}u_{n+k-1} \;+\; \cdots \;+\; a_1u_{n+1} \;+\; a_0u_n \;=\; b$$
est-il un espace affine ?
4. L'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+1) = f(x)+1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est-il un espace affine ?
5. L'ensemble des matrices dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$de la forme
$$\begin{pmatrix} 1+a-b & a-b & 0 \\ 0 & 2 & 2a-b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$ est-il un espace affine ? Déterminer sa dimension.

Exercice 2 (Sans coordonnées).
Soit (X, V) un espace affine.

1. Pour trois points $O, P, Q \in X$ et $\vec{v} \in V$, montrer que $P+\vec{v} = Q$ si et seulement si $\overrightarrow{OP} + \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$.
2. On dira que des points sont *collinéaires* s'ils sont sur une même droite affine. Alors, un *parallélogramme* est une suite (P, Q, R, S) de quatre points dont aucune partie de trois points ne sont collinéaires, telle que la droite déterminée par $\overrightarrow{PQ}$ soit parallèle à celle déterminée par $\overrightarrow{RS}$, et que la droite déterminée par $\overrightarrow{PS}$ soit parallèle à celle déterminée par $\overrightarrow{QR}$.
Montrer que si (P, Q, R, S) est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{SP} = \vec{0}$.

Exercice 3 (Un peu de théorie).

1. Soient (X, V) un espace affine, $P_1, \ldots, P_r \in X$ et $a_1, \ldots, a_r \in K$ où K est le corps sur lequel est défini l'espace vectoriel V. Si $\sum_{i=1}^r a_i = 1$, alors montrer que pour tous $O, O' \in X$,

$$O \ + \ \sum_{i=1}^{r} a_i \, \overrightarrow{OP_i} = \ O' \ + \ \sum_{i=1}^{r} a_i \, \overrightarrow{O'P_i} \quad .$$

   En d'autres termes, le point $O + \sum_{i=1}^r a_i \, \overrightarrow{OP_i}$ ne dépend pas du choix de O.

2. Soient $(O; B)$ et $(O'; B')$ deux repères pour un espace affine (X, V), et $m \in X$. Exprimer les coordonnées $(x'_1, \ldots, x'_d)$ de m dans $(O'; B')$ en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$ de m dans $(O; B)$.
3. Montrer que deux hyperplans affines distincts d'un espace affine X sont soit parallèles, soit s'intersectent en un un sous-espace affine de dimension $\dim(X) - 2$.

Exercice 4 (Positions et intersections).
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. La direction d'une droite affine D est notée $\vec{D}$. Soit $k \geq 3$ un entier. On dit qu'une famille $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq k}$ de droites affines est en *position générale* si

1. pour $i \neq j$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$
2. pour tout triplet i, j, k d'entiers distincts, $\mathbb{R}^3 = \vec{\Delta_i} \oplus \vec{\Delta_j} \oplus \vec{\Delta_k}$ (la somme directe).

On dit qu'une droite affine Δ est une *sécante* de la famille $(\Delta_i)_{1 \leq i \leq k}$ si $\Delta \cap \Delta_i$ est un singleton pour tout $1 \leq i \leq k$.

Sur le cube unité, on considère
- D_1 la droite affine passant par $(0, 0, 1)$ dirigée par $\vec{e_1}$,
- D_2 la droite affine passant par $(1, 0, 0)$ dirigée par $\vec{e_2}$,
- D_3 la droite affine passant par $(0, 1, 0)$ dirigée par $\vec{e_3}$,
- D_4 la droite affine passant par $(1, 1, 1)$ dirigée par $\vec{e} = (1, -1, 1)$.

1. (a) Donner, dans le repère canonique$((0, 0, 0); B)$ un système d'équations cartésiennes pour chaque droite D_i, $1 \leq i \leq 4$.

   (b) La famille $(D_i)_{1 \leq i \leq 4}$ est-elle en position générale ?
2. Montrer, en les déterminant, que la famille $(D_i)_{1 \leq i \leq 4}$ admet exactement deux sécantes.
3. Donner explicitement une droite affine D_5 telle que $(D_i)_{1 \leq i \leq 5}$ soit en position générale et n'admette pas de sécante.