

Géométrie élémentaire (Automne 2010) – Fiche 10

5 janvier 2011

Exercice 1 (Plan affine euclidien : rappels d'un passé triangulaire).

1. Soit ABC un triangle. On définit par a , b et c les longueurs des côtés BC , CA et AB respectivement. On utilisera A , B et C pour noter les angles correspondant aux sommets homonymes. Montrer que :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC .

2. Avec les mêmes notations que celles du point (1), montrer que

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

3. Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC .

(i) Montrer que l'intersection de AO et BC est le barycentre $\left(\begin{array}{cc} B & C \\ \sin(2B) & \sin(2C) \end{array} \right)$.

(ii) Déduire de (i) les coordonnées barycentriques du point O .

Exercice 2 (Plan affine euclidien : rotations).

1. Soient A un point, D_1 , D_2 deux droites dans le plan affine euclidien. Construire un triangle équilatéral ABC avec B sur D_1 et C sur D_2 .

2. Soient ABC un triangle, β et γ les deux points tels que les triangles βAB et γAC soient des triangles rectangles isocèles extérieurs à ABC et d'hypoténuses AB et AC respectivement. Si I est le milieu de BC , alors montrer que le triangle $\beta I \gamma$ est rectangle isocèle en I .

Exercice 3 (Plan affine euclidien : Composée des rotations).

Soit ABC un triangle équilatéral d'orientation positive dans le plan affine euclidien et soient f, g et h les rotations à centres A , B et C et angles $-\pi/3$.

Déterminer $h \circ g \circ f$ et $g \circ f$. Faire le même exercice avec l'angle $\pi/3$.

Exercice 4 (Isométries en dimension 3).

1. Déterminer l'espace des points fixés par la rotation suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Que pouvez-vous dire de son angle de rotation ?

2. Soient f et g deux rotations. Quand l'angle de $g \circ f$ est-il la somme des angles de g et de f ?

3. Quelle est la composée de trois réflexions par rapport à des plans parallèles ?

4. Décrire la composée de trois réflexions par rapport à des plans deux à deux orthogonaux.

Exercice 5 (Culture générale).

Est-ce un plan affin ou affine ?