UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Theresia Eisenkoelbl

Géométrie élémentaire (Automne 2010) – Fiche 3

6 octobre 2010

Exercice 1 (Projections).

- **a**. Soient $\mathcal{D}$ une droite d'un plan affine $\mathcal{P}$ et d' une direction de droite non parallèle à $\mathcal{D}$. En d'autres termes, d' est un espace vectoriel de dimension 1 dont une (équivalemment, toute) base est non colinéaire à la droite $\mathcal{D}$. On appelle *projection* sur $\mathcal{D}$ parallèlement à d' l'application $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui associe à chaque $M \in \mathcal{P}$ le point M' dans $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{MM'}$ soit colinéaire à d'. Déterminer l'application linéaire associée à π.
- **b**. Le point précédent est en fait un cas particulier d'une notion générale de projection affine. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\mathcal{F}$ un sous-espace de $\mathcal{E}$ de directions respectives E et F. Soit G un sous-espace vetoriel de E tel que $E = F \oplus G$. Définir une projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.
- **c**. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application affine vérifiant $\pi \circ \pi = \pi$. Montrer que π est une projection.
- **d**. Trouver la matrice qui représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ l'application linéaire associé à la projection sur la droite $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = -x + 2\}$ parrlèlement au vecteur $\vec{d'} = -\vec{e_1} - \vec{e_2}$. Quel est le rang de cette matrice ? Est-ce nécessaire d'expliciter cette matrice pour déterminer son rang ?
- **e**. Même question que le point précédent dans $\mathbb{R}^3$, pour la projection sur le plan $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -x + y + z = 1\}$ parallèlement au vecteur $\vec{d'} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$.

Exercice 2 (Thalès et les triangles).

Soit ABC un triangle dans un plan affine $\mathcal{P}$. Nous définissons d'abord une suite $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de points sur les côtés de ABC. On fixe arbitrairement M_0 un point sur le côté AB. La parallèle à BC issue de M_0 coupe AC en M_1. La parallèle à AB issue de M_1 coupe BC en M_2, ainsi de suite.

- **a**. Montrer que si $M_0 \neq B$ alors $M_i = M_{i+6}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
- **b**. Etudier le cas où $M_0 = B$?

Exercice 3 (Convergence sur un triangle).

Soit ABC un triangle dans un plan affine $\mathcal{P}$. A partir de tout point M, on construit $M_0 = M$, puis M_1 le milieu de M_0A, M_2 le milieu de M_1B, M_3 le milieu M_2C, M_4 le milieu de M_3A, et ainsi de suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit ϕ_n comme l'application qui associe à chaque point M du plan $\mathcal{P}$ le point M_n construit comme ci-dessus.

- **a**. Montrer que toute ϕ_n est une application affine.
- **b**. Montrer que la suite $(M_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.
- **c**. Est-ce que la suite $(M)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?

Exercice 4 (Théorème de Menelaüs).
Soient ABC un triangle, A', B' et C' des points des droites BC, CA et AB respectivement. Montrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si les trois points vérifient l'égalité

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 \quad .$$

(*Rappelons que la notation* $\overline{AB}$ *désigne une longueur "algébrique". Plus précisément, l'identité suivante définit* $\overline{AB}$ *:*

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\ \vec{u}\ ,$$

où $(\vec{u})$ *est une base fixée pour l'espace vectoriel de dimension* 1 *associée à la droite* AB.)

Exercice 5 (Applications affines (Entraînement)).
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles d'un plan affine. A tout point M du plan, on associe le point M' défini de la façon suivante : la parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par M coupe D en H, et M' est tel que H soit le milieu MM'. Montrer que l'application $M \longmapsto M'$ est une application affine.