

Géométrie élémentaire (Automne 2010) – Fiche 4

13 octobre 2010

Exercice 1 (Théorème de Ceva).

Soient ABC un triangle, A' , B' et C' des points des droites BC , CA et AB respectivement.

Montrer que les droites AA' , BB' et CC' sont concourantes ou parallèles si et seulement si les trois points vérifient l'égalité

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 2 (Théorème de Ceva - version trigonométrique).

Soient ABC un triangle, A' , B' et C' des points des droites BC , CA et AB respectivement.

Montrer que les droites AA' , BB' et CC' sont concourantes ou parallèles si et seulement si les trois points vérifient l'égalité

$$\frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \widehat{CAA'}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACC'}}{\sin \widehat{BCC'}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBB'}}{\sin \widehat{ABB'}} = 1.$$

Exercice 3 (Application Ceva).

- Montrer que les bissectrices des angles d'un triangle sont concourantes.
- Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.
- Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
- Soient d_A , d_B et d_C trois droites concourantes qui passent par A , B et C . Soient d'_A , d'_B et d'_C les symétriques de ces droites par rapport aux bissectrices des angles à A, B et C .

Montrer que d'_A , d'_B et d'_C sont concourantes.

Exercice 4 (Repères affines).

Donner une représentation des applications affines suivantes par rapport d'un repère affine adapté.

- Une translation par v .
- Une rotation par rapport à la droite Δ et d'angle α dans $\mathbb{R}^3$.
- Une réflexion par rapport à la droite Δ dans $\mathbb{R}^2$.

- d. Une homothétie.
- e. L'application affine f_{AB} qui associe au point X le centre de gravité du triangle ABX .

Exercice 5 (Groupe affine 1).

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

Montrer que :

Le centre du groupe affine $GA(\mathcal{E})$ (ensemble des éléments du groupe qui commutent avec tous les autres) est réduit à l'identité.

Exercice 6 (Groupe affine 2).

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et E sa direction.

Montrer qu'il existe une bijection

$$GA(\mathcal{E}) \longmapsto GL(E) \times E.$$

Existe-t-il un isomorphisme de groupes ?

Exercice 7 (Groupes).

Lesquels des ensembles suivants forment un groupe ?

- a. Les homothéties du plan affine sur $\mathbb{R}$.
- b. Les translations du plan affine sur $\mathbb{R}$.
- c. Les rotations du plan affine sur $\mathbb{R}$.
- d. L'ensemble des rotations et translations du plan affine sur $\mathbb{R}$.