UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Theresia Eisenkoelbl

Géométrie élémentaire (Automne 2010) – Fiche 5

20 octobre 2010

Exercice 1 (Symétries).
0. (Un peu d'algèbre linéaire) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfait $A^2 = I$ si et seulement si elle est diagonalisable avec valeurs propres 1 ou -1.

1. Soient X un espace affine et f une application affine. Monter que $f^2 = \mathrm{Id}_X$ si et seulement si f est une symétrie.

2. Soient $P = (0, c)$ (dans la base canonique) un point dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}$ une droite passant par P et de vecteur directeur $(1, \lambda)$. Déterminer la symétrie par rapport à $\mathcal{D}$ et dans la direction déterminée par le vecteur $(-\lambda, 1)$. Faire le même exercice par rapport à $\mathcal{D}$ mais dans la direction déterminée par $\vec{e_1}$ (il faudra supposer $\lambda \neq 0$).

3. Montrer que le produit de deux symétries s_1 et s_2 est une symétrie si et seulement si les deux symétries commutent, en d'autres termes, $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$. Qu'en déduisez-vous sur leurs espaces de projection et sur leurs directions ?

Exercice 2 (Triplexes).
Soient (D_1, D_2, D_3) et $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ deux triplexes. Montrer qu'il existe un isomorphisme affine f et un seul tel que $f(D_i) = \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$.

Exercice 3 (Géométrie classique).
Etant donnés n points distincts $A_1, \ldots, A_n$ d'un plan affine $\mathcal{P}$, peut-on trouver n points $B_1, \ldots, B_n$ tels que $A_1, \ldots, A_n$ soient les milieux respectifs de B_1B_2, B_2B_3, ..., B_nB_1 ? est une homothétie de rapport -1.

Exercice 4 (Géométrie classique : Pappus).
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites se coupant en O. Soient A, B et C trois points de $\mathcal{D}$, A', B' et C' trois points de $\mathcal{D}'$. On suppose que $B'C$ et $C'B$ se coupent en α, $C'A$ et $A'C$ en β, $A'B$ et $B'A$ en γ. Montrer que α, β et γ sont alignés.

Exercice 5 (Géométrie classique : Desargues).
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose que BC et $B'C'$ se coupent en α, CA et $A'C'$ en β, AB et $A'B'$ en γ. Montrer que α, β et γ sont alignés si et seulement si AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles.

Exercice 6 (Coin culture).
Quel est l'ancien nom du laboratoire de mathématiques de l'Université Lyon-1 ?