UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Theresia Eisenkölbl

Géométrie élémentaire (Automne 2010) – Fiche 6

3 novembre 2010

Exercice 1 (Coordonnées barycentriques).
Soit $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un repère affine de l'espace $\mathcal{E}$. Montrer que tout point M de $\mathcal{E}$ est barycentre de $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ pour certains coefficients $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$. Ces coefficients sont-ils uniques ? On appelle $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ une système de coordonnées barycentriques du point M dans le repère $(A_0, \ldots A_n)$.

a. Pour la droite réelle, caractériser les coordonnées barycentriques des points à l'intérieur de segment A_0A_1.

b. Pour le plan réel, caractériser les coordonnées barycentriques des points a l'intérieur de triangle $A_0A_1A_2$.

c. Pour la droite reelle, déterminer la position des points avec coordonnées barycentriques $(1, 1)$, $(1, 3)$ et $(1, -2)$.

d. Pour la droite complexe (representée par le plan habituel), déterminer la position des points avec coordonnées barycentriques $(1, 2)$, $(1-i, 1+i)$ et $(1+i\sqrt{3}, 1-i\sqrt{3})$.

Exercice 2.
Soit ABC un triangle de plan affine réel.

Trouver les coordonnées barycentriques pour le repère affine (A, B, C) pour

a. A, B, C

b. les milieux des cotés

c. le centre de la gravité

d. le centre de cercle inscrit

e. l'orthocentre

f. le point commun des transversales concourantes AA', BB', CC'.

Exercice 3.
Soit ABC un triangle de plan affine réel, A' le milieu de BC et G le centre de gravité.

En utilisant les coordonnées barycentriques pour le repère affine (A, B, C), montrer que

$$\frac{A'G}{GA} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4.
Soit $ABCD$ un quadrangle dans le plan affine réel et soient A', B', C', D', E', F' les milieux de segments AB, BC, CD, DA, AC, BD, respectivement.

Montrer que les droites $A'C'$, $B'D'$ et $E'F'$ sont concourantes et le point commun est le milieu de chaque segment.

Exercice 5.
Soit ABC un triangle de plan affine et soient A' un point sur BC, B' un point sur CA et C' un point sur AB. On suppose que les trois droites AA', BB' et CC' sont concourantes dans le point X.

Calculer
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{BX}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{CX}}{\overline{CC'}}.$$

Exercice 6 (Théorème de Napoléon).
Soit ABC un triangle de plan affine. Soit C' le point à l'autre coté de AB que C tel que BAC' forme un triangle équilateral. Trouver similairement les points A' et B' tels que CBA' et ACB' sont équilateraux.

Soient R, S, T les centres de gravité des nouveaux triangles BAC', CBA' et ACB'.

Montrer que RST forme un triangle équilatéral.

Exercice 7.
Soit $ABCD$ un quadrangle de plan affine. Soient A' et C' des points tels que BAA' et DCC' forment des triangles équilatéraux vers l'extérieur de quadrangle et B' et $'C'$ des points tels que CBB' et ADD' forment des triangles équilatéraux vers l'intérieur de quadrangle

Montrer que $A'B'C'D'$ forme un parallélogramme.

Exercice 8.
Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on place trois points A', B', C' tels que $AC'/C'B = BA'/A'C = CB'/B'A$ et les reflexions A'', B'', C'' de A', B', C' par rapport de milieu de coté respectif, c.a.d $\overrightarrow{A'\frac{B+C}{2}} = \overrightarrow{\frac{B+C}{2}A''}$ etc.

Montrer que l'aire de $A'B'C'$ égale l'aire de $A''B''C''$.