UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan Tuna Altınel, Theresia Eisenkoelbl

Géométrie élémentaire (Automne 2010) – Fiche 7

17 novembre 2010

Exercice 1 (Quelques polytopes bien connus et la *topologie affine*).

1. Soient $\mathcal{E} = (X, V)$ un espace affine de dimension d sur les réels et $(P_0, \ldots, P_d)$ un repère affine. Vérifier que les ensembles suivants définissent des polytopes :
   (a) le *parallélépipède* $P = \{P_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} \mid \lambda_i \in [0, 1]\}$;
   (b) le *simplexe plein* $S = \{\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \ldots & P_d \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_d \end{pmatrix} \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^d \lambda_i = 1\}$;
   (c) le *cube fermé* $C(P_0, 1) = \{P_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} \mid |\lambda_i| \leq 1\}$;
   (d) le *losange fermé* $L(P_0, 1) = \{P_0 + \sum_{i=1}^d \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} \mid \sum_{i=1}^d |\lambda_i| \leq 1\}$.
2. Donner des exemples de polyèdres non compacts.
3. Trouver les analogues topologiques des deux derniers exemples ci-dessus.
4. Pour tout $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}$, on pose $\overset{\circ}{C}(x, r) = \{x + \sum_{i=1}^d \lambda_i \vec{e}_i \mid |\lambda_i| < r\}$, où $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ est la base canonique de V. Montrer que la famille $\mathcal{B}_C = \{\overset{\circ}{C}(x, r) \mid x \in X,\ r \in \mathbb{Q}\}$ est une base d'une topologie munie de laquelle $\mathcal{E}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^d$ muni de sa topologie induite par l'une de ses normes. On l'appellera *topologie affine*.
5. Montrer que par rapport à la topologie affine toute application affine est continue.
6. Soit R un demi-espace fermé. Quelle est la frontière de R, notée $\mathrm{Fr}(R)$?
7. Montrer que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans $\mathcal{E}$ est compact.
8. Soit S une partie convexe de $\mathcal{E}$. Si $P \in \overset{\circ}{S}$ et $Q \in S$, montrer que l'intérieur du segment ouvert qui les joint, à savoir $\{tP + (1-t)Q \mid t \in]0, 1[\ \}$, est contenu dans $\overset{\circ}{S}$.

Exercice 2 (Représentation minimale d'un polyèdre convexe).

Soient $\mathcal{E} = (X, V)$ un espace affine de dimension d sur $\mathbb{R}$ et P un polyèdre convexe d'intérieur non vide dans $\mathcal{E}$. On dira que les demi-espaces $\{R_1, \ldots, R_k\}$ forment une *représentation minimale* de P si $P = \bigcap_{i=1}^k R_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et que $P \subsetneq \bigcap_{j \neq i} R_j$. L'objectif de cet exercice est de montrer que cette représentation est unique à l'ordre près.

On pose $H_i = \mathrm{Fr}(P_i)$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $H_i \cap P$ est d'intérieur non vide dans H_i, par rapport à la topologie induite sur H_i en tant que sous-espace topologique. (*Indication : vous pouvez utiliser le point 8 du premier exercice.*)
2. Si H est un hyperplan tel que $H \cap \mathrm{Fr}(P)$ soit d'intérieur non vide dans H, montrer que $H = H_i$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, k\}$.
3. Conclure.

Exercice 3 (Les faces d'un polyèdre).
On garde la notation et les hypothèses générales de l'exercice 2. On appellera les $H_i \cap P$ les *faces de dimension* $d-1$ de P. Une face de dimension j ($j \in \{0, \ldots, d-2\}$) de P est une face de dimension j d'une face de dimension $j+1$ de P.

1. Si $k \geq 2$, et que pour $i \in \{1,2\}$ $a_i \in \overset{\circ}{H_i}$ (l'intérieur de H_i par rapport à sa topologie induite en tant que sous-espace), alors le segment ouvert joignant a_1 et a_2 (voir le point 8 de l'exercice 1) est contenu dans l'intérieur de P.
2. Montrer que si F est une face de dimension $d-r$, alors il existe $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $F = H_{i_1} \cap \ldots \cap H_{i_r} \cap P$.
3. Définir une *arête* et un *sommet* de P. Montrer que les directions des arêtes passant par un sommet engendrent V.

Exercice 4 (Dimension 3 et Euler).
Soit P un polytope convexe dans un espace affine de dimension 3 sur les réels jouissant des propriétés suivantes de régularités :
- toutes les faces ont le même nombre s de sommets ;
- de chaque sommet part le même nombre r d'arêtes.

Montrer que $\{r, s\} \in \{\{3,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}\}$.