

Géométrie élémentaire (Automne 2010) – Fiche 8

1 décembre 2010

Exercice 1 (Produit scalaire des diagonales).

Soit $ABCD$ un quadrilatère dans le plan euclidien. Montrer que le produit scalaire $(\vec{AC} | \vec{BD})$ des diagonales ne dépend que des longueurs de cotés du quadrilatère.

Exercice 2 (Sous-ensembles stables).

Soit V l'espace euclidien \mathbb{R}^n avec le produit scalaire standard.

- Pour S un sous-ensemble de V , montrer que $G = \{g \in O_n : g(S) = S\}$ forme un sous-groupe de O_n .
- Trouver G si S est un sous-espace de dimension $n - 1$.
- Trouver G si S est un ensemble de trois points qui forment un triangle équilatéral avec centre O .
- Existe-t-il un ensemble fini S de points tel que G est isomorphe au groupe cyclique de taille 3?

Exercice 3 (Groupe $O_{1,1}$).

Soit \mathbb{R}^2 muni de la forme bilinéaire symétrique $B((x, t), (x', t')) = xx' - tt'$. Trouver une description explicite du groupe $O_{1,1}$ des matrices 2×2 réelles qui préservent B .

Exercice 4 (Gram-Schmidt nombres réels).

- Montrer que $((1, -2, -2), (1, 1, 4), (0, 0, 1))$ forme une base de \mathbb{R}^3 .
- En utilisant la méthode de Gram-Schmidt trouver une base orthonormale pour l'espace euclidien \mathbb{R}^3 à partir du produit scalaire standard et la base $((1, -2, -2), (1, 1, 4), (0, 0, 1))$.
- Quel est le résultat si on remplace le vecteur $(0, 0, 1)$ par $(0, 0, \lambda)$?
- Quel est le résultat si on remplace le vecteur $(1, -2, -2)$ par $(-1, 2, 2)$?
- Montrer que $B((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' + xy' + xz' + yx' + 2yy' + yz' + zx' + zy' + 2zz'$ est un produit scalaire pour \mathbb{R}^3 .
- En utilisant la méthode de Gram-Schmidt trouver une base orthonormale pour l'espace euclidien \mathbb{R}^3 à partir de la base standard et le produit scalaire B .

Exercice 5 (Gram-Schmidt polynômes de Legendre).

- Montrer que $\int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$ donne un produit scalaire pour l'espace vectoriel des polynômes réels du degré au plus 3.
- En utilisant la méthode de Gram-Schmidt trouver une base orthonormale pour cet espace à partir de la base standard.