UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel, Theresia Eisenkölbl

Géométrie élémentaire (Automne 2010) – Fiche 9

8 decembre 2010

Exercice 1 (Gram-Schmidt (qu'est-ce que ça nous dit ?)).
On se place dans un espace vectoriel euclidien E, en d'autres termes un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive). Soit F un sous-espace vectoriel de E.

a. (a) Si u est un vecteur arbitraire de E, montrer qu'un vecteur v dans F est plus proche de u que tout autre vecteur $w \in F$ (pour tout $w \in F$, $\|u - v\| \leq \|u - w\|$) si et seulement si $u - v$ est orthogonal à tout vecteur $w \in W$.

(b) Montrer l'existence et l'unicité dans F, d'un vecteur plus proche de u.

b. Soit A une matrice $n \times n$ réelle et inversible. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure $P = P(A)$, qui dépend de A continûment telle que $AP \in O(n)$.

c. Déduire du point précédent que le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

Exercice 2 (Barycentre dans un espace affine euclidien).
On se place dans un espace affine euclidien, en d'autres termes un espace affine $\mathcal{E} = (X, V)$, dirigé par un espace vectoriel V euclidien. On notera $(u|v)$ le produit scalaire de deux vecteurs de $u, v \in V$.

a. Montrer que $G = \begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$\alpha OA^2 + (1-\alpha)OB^2 \;=\; OG^2 + \alpha GA^2 + (1-\alpha)GB^2$$

(notation : $OA^2 = (\overrightarrow{OA} \mid \overrightarrow{OA})$).

b. Montrer que si une application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ satisfait la condition

$$\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \| \;=\; \| \overrightarrow{AB} \| \quad \text{pour tous} \quad A, B \in X \ ,$$

alors f est affine.
(*Vous pouvez utiliser la caractérisation suivante des applications affines : Une application $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est affine si et seulement si pour tous points $A, B \in X$*

$$f\left(\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix} f(A) & f(B) \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \qquad)$$

c. Plus généralement, si $k \geq 2$, et que $((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k))$ est un système de points pondérés, montrer que pour toute paire de points G et O

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i OA_i^2 \;=\; \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) OG^2 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i GA_i^2 + 2(\overrightarrow{OG} \mid \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \overrightarrow{GA_i}) \ .$$

En conclure l'identité particulière dans le cas où G est le barycentre d'un système pondéré.

Exercice 3 (Géométrie dans le plan euclidien).

a. Soit ABC un triangle dont les angles en B et C sont aigus. Montrer qu'il existe un carré $MNPQ$ tel que M et N appartiennent à B, Q à AB et P à AC.

b. Soient $\mathcal{D}$ une droite et A, B deux points du même côté de $\mathcal{D}$. Construire un point $M \in \mathcal{D}$ tel que la somme $MA + MB$ soit minimal. (Notation : $MA = \| \overrightarrow{MA} \|$).

Exercice 4 (Orientation).
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de E. Montrer que la relation qui lie deux bases e et e' si et seulement si le déterminant de la matrice de passage de e à e' est positif est une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}$ qui a exactement deux classes.

Exercice 5 (La topologie du groupe orthogonal).
On se place dans un espace vectoriel euclidien E.

a. Montrer que le groupe orthogonal $O(n)$ est compact.

b. Soit $f \in O(n)$. Montrer que E a une base par rapport à laquelle E est la somme directe orthogonale
$$E \;=\; V \oplus W \oplus P_1 \oplus \ldots \oplus P_r$$
et f se représente par une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \begin{pmatrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$
où V est le sous-espace propre correspondant à 1, W celui correspondant à -1 et les P_i sont des plans des rotations.

c. On note $O^+(n)$ le sous-groupe des transformations de déterminant 1. Déduire du point précédent que si $A \in O^+(n)$, alors il existe une matrice orthogonale P telle que P^tAP ait la forme ci-dessus.

d. Montrer que le groupe $O(n)$ a deux composantes connexes par arcs dont $O^+(n)$ et qui sont homéomorphes. Sont-ils isomorphes ?