Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2014/2015
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles
Feuille 1.

Exercice 1 Soit K un corps commutatif.

1. Vérifier que toute sous-structure de la structure $\langle K, 0, 1, +, -, .\rangle >$ est un anneau.
2. Ajouter une fonction f au langage de façon à ce que toute sous-structure de $\langle K, 0, 1, +, -, ., f\rangle$ soit un corps.

Exercice 2 Donner un exemple de deux ordres totaux discrets infinis qui ne sont pas ∞-équivalents.

Exercice 3 Montrer que la relation d'∞-équivalence est une relation d'équivalence.

Exercice 4 Soit K un corps. On considère le langage L_K des K-espaces vectoriels, $L_K = \{0, +, \lambda_k \colon k \in K\}$, les λ_K étant des fonctions unaires (multiplication par le scalaire $k \in K$). Soient E et F deux espaces vectoriels, vus comme L_K-structures. Montrer que si E et K sont de dimension infinie alors ils sont ∞-équivalents. Si on suppose E de dimension finie, quels sont les K-espaces vectoriels ∞-équivalents à E ?

Exercice 5

1. Soit K un corps algébriquement clos. Montrer que pour tout sous-corps k de K fini ou dénombrable, la clôture algébrique de k est dénombrable.
2. Soit K_1 et K_2 deux corps algébriquement clos de même caractéristique et non dénombrables. Montrer que K_1 et K_2 sont ∞-équivalents.

Exercice 6 Soit L un langage et $\mathbb{K}$ une classe de L-structures. On suppose que A, B appartiennent à $\mathbb{K}$ et que pour toute structure $C \in \mathbb{K}$ il existe un unique morphisme de A dans C et un unique morphisme de B dans C. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme de A sur B.

Exercice 7 On considère le langage des graphes $L = \{R\}$, où R est une relation binaire. On dit qu'un graphe dénombrable Γ, vu comme une L-structure, est un *graphe de Radó* si pour toute parties finies disjointes A, B de Γ il existe $x \in \Gamma$ tel que l'on ait $R(x, a)$ pour tout $a \in A$ et on n'ait $R(x, b)$ pour aucun $b \in B$. Montrer que deux graphes de Radó sont isomorphes.

Question subsidiaire : on construit un *graphe aléatoire* en stipulant que son ensemble de sommets est $\mathbb{N}$, et que chaque arête (i, j), $i \neq j$, est présente dans le graphe avec probabilité $1/2$. Montrer qu'un graphe aléatoire est presque sûrement un graphe de Radó.