Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2014/2015

Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles

Feuille 2.

Exercice 1 Montrer que toute formule est équivalente à une formule ne contenant ni le connecteur booléen $\vee$, ni le quanteur $\forall$.

Exercice 2 Montrer que deux formules $\phi(\bar{x})$ et $\psi(\bar{x})$ dans un langage L sont équivalentes si et seulement si toute L-structure satisfait $\forall \bar{x}\, (\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Exercice 3 Montrer que toute formule est équivalente à une formule *prénexe*, c'est-à-dire une formule de la forme $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \phi$, où les Q_i sont des quanteurs et ϕ est une formule sans quanteur.

Exercice 4 Soit $\mathcal{M}$, N deux structures dans un même langage L. Montrer que si $\mathcal{M}$ est finie et $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ alors $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}|$.

Exercice 5 Montrer que deux ordres totaux denses sans extrémités sont élémentairement équivalents. En particulier $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Exercice 6

1. Donner un exemple de structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ telles que $\mathcal{M}$ soit une sous-structure de $\mathcal{N}$ mais ne soit pas élémentairement équivalente à $\mathcal{N}$.
2. Donner un exemple de structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ telles que $\mathcal{M}$ soit une sous-structure de $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ soient élementairement équivalentes, mais $\mathcal{M}$ ne soit pas une sous-structure élementaire de $\mathcal{N}$.

Exercice 7 Montrer que l'ordre sur $\mathbb{R}$ est définissable sans paramètre dans la structure $\langle R, +, . \rangle$.

Exercice 8 Montrer que l'ensemble des nombres premiers est une partie définissable dans la structure $\langle N, . \rangle$. A-t-on besoin de paramètres ?

Exercice 9 Montrer que la famille $Def(\mathcal{M})$ des parties définissables dans une structure $\mathcal{M}$ est close par

1. Combinaison booléennes finies (union, intersection, complémentaire).
2. Produits cartésiens.
3. Projections (si A est définissable dans M^{n+m} alors la projection de A sur M^n est définissable).

4. Spécialisations : si A est une partie définissable de M^{n+m} et $\bar{b} \in M^m$ alors

$$A(\bar{b}) := \{\bar{a} \in M^n \colon (\bar{a}, \bar{b}) \in A\} \text{ est définissable.}$$

5. Permutation des coordonnées.

En fait la famille des parties définissables dans $\mathcal{M}$ est la plus petite famille de parties de $\bigcup_{n>0} M^n$ contenant les ensembles définissables atomiques et close par combinaison booléennes finies, produits cartésiens et projections.

Exercice 10 Soit T une théorie complète.

1. Montrer que si T a un modèle fini alors tous les modèles de T sont isomorphes. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas T complète ?
2. Montrer que si T a un modèle infini alors tous les modèles de T sont infinis. Sont-ils tous isomorphes ?

Exercice 11 La théorie des groupes infinis est-elle complète ? Et celle des corps infinis ?

Exercice 12
1. Donner une axiomatisation de la théorie des ordres totaux denses sans extrémités. Montrer que cette théorie est complète.
2. Même question pour la théorie des relations d'équivalence à deux classes infinies et la théorie des relations d'équivalences à une infinité de classe toutes infinies.

Exercice 13 Soit $\mathcal{N}$ une structure et $\mathcal{M}$ une sous-structure de $\mathcal{N}$. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $M \prec \mathcal{N}$.
2. $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M) = \mathrm{Th}(\mathcal{N}, M)$.
3. L'inclusion $M \hookrightarrow N$ est un plongement élémentaire.

On appelle $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, M)$ le *diagramme élémentaire* de M.

Exercice 14
1. Soient $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3$. Montrer que
   (a) $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ implique $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$;
   (b) $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$ implique $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$.
2. Soit I un ensemble totalement ordonné et $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une *chaîne élémentaire* de structures dans un même langage L (i.e. $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$ pour tout $i < j$). Montrer que pour tout $i \in I$ on a $\mathcal{M}_i \prec \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$.

Exercice 15 Entre quelles stuctures dans la liste suivante existe-t-il un plongement ? Un plongement élémentaire ?

$$\langle Q, <, +, 0\rangle, \quad \langle \mathbb{Q}, <, ., 1\rangle, \quad \langle \mathbb{R}, <, +, 0\rangle, \quad \langle R, <, ., 1\rangle, \quad \mathbb{R}^+, <, ., 1\rangle$$

Exercice 16 Soit L le langage réduit au symbole de relation binaire $<$. Soit T la théorie des ordres totaux dans ce langage.

1. Décrire une axiomatisation de T.
2. Soit $n > 0$. Expliciter une formule du premier ordre $\phi_n(x, y)$ telle que pour tout modèle $\mathcal{M}$ de T, $\mathcal{M} \models \phi(a, b)$ si et seulement si $a < b$ et il existe exactement $n - 1$ éléments de $\mathcal{M}$ strictement compris entre a et b.
3. Soit $\mathcal{N}$ la L-structure $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique, et $\mathcal{M}$ la sous-structure de $\mathcal{N}$ de domaine $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$. A l'aide d'un va-et-vient, montrer que $\mathcal{M}$ est une sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$.
4. On considère la sous-structure de $\mathcal{N}$ de domaine $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times 2\mathbb{Z}$. Que peut-on dire de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}'$? De $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{N}$?
5. Si $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_3$ sont telles que $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_3$, a-t-on nécessairement $\mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}_3$?