Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2014/2015
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles

Feuille 3 : preuve et premières applications du théorème de compacité.

Exercice 1 On fixe un langage $\mathcal{L}$, un ensemble I, une famille de $\mathcal{L}$-structures $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur I.

1. On définit une relation $\sim$ sur $\prod_i M_i$ en posant
$$(x_i) \sim (y_i) \Leftrightarrow \{i \in I \colon x_i = y_i\} \in \mathcal{U} \ .$$
Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
On note M l'espace quotient. Si $m = (m_i)$ est un élément de $\prod M_i$, on note $[m]$ sa classe d'équivalence pour $\sim$.
2. Trouver une façon de faire de M une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, de telle façon que pour tout $\bar{m} = ([m^1], \ldots, [m^n]) \in M^n$ on ait
$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{m}) \Leftrightarrow \{i \in I \colon \mathcal{M}_i \models \varphi(m^1_i, \ldots, m^n_i)\} \in \mathcal{U} \ .$$
Indication : Il n'y a pas beaucoup de façons d'interpréter les symboles du langage pour que la propriété soit vraie... Une fois que la propriété est vérifiée pour les formules atomiques, raisonner par induction sur les formules.
On appelle *ultraproduit* de la famille $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ la structure construite dans cet exercice. Que pouvez-vous dire de l'ultraproduit si jamais l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ a le mauvais goût d'être principal ?

Exercice 2 Soit Σ un ensemble d'énoncés dans un langage $\mathcal{L}$ tel que tout sous-ensemble fini de Σ soit consistant (c'est-à-dire, tel que pour toute partie finie F de Σ il existe une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}_F$ dans laquelle tous les énoncés de F sont vrais). On veut montrer que Σ est consistant (c'est le *théorème de compacité*). On peut supposer Σ infini, ce qu'on fait dans la suite.

1. Soit Ω l'ensemble formé par toutes les parties finies de Σ. Pour A une partie finie de Σ, on définit $I_A = \{B \in \Omega \colon A \subseteq B\}$. Montrer que
$$\mathcal{F} = \{X \subseteq \Omega \colon \exists A \in \Omega \ X \supseteq I_A\}$$
est un filtre sur Ω.
2. On rappelle que, si l'on admet l'axiome du choix, tout filtre sur Ω est contenu dans un ultrafiltre $\mathcal{U}$. En utilisant un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$, et un ultraproduit de structures bien choisies, démontrer le théorème de compacité.

Exercice 3 Montrer qu'il n'existe pas de théorie dans le langage des ordres dont les modèles sont précisément les ordres finis, et qu'il n'existe pas de théorie dans le langage des corps dont les modèles sont précisément les corps finis.

Exercice 4 Montrer qu'une théorie T qui a des modèles finis de cardinal arbitrairement grand a un modèle infini.

Exercice 5 Soit $\mathcal{L}$ un langage, θ un énoncé de ce langage et T_1, T_2 deux théories dans ce langage qui contiennent θ. On suppose que tout modèle de θ est soit modèle de T_1 soit modèle de T_2 mais jamais des deux. Montrer que T_1 et T_2 sont finiment axiomatisables.

Exercice 6 On rappelle que la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique p (0 ou un nombre premier) est complète pour tout p. A l'aide du théorème de compacité, montrer le *principe de transfert* selon lequel étant donné ϕ un énoncé dans le langage des anneaux, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle.
2. ϕ est vrai dans tout corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, pour tout nombre premier p suffisamment grand.
3. ϕ est vrai dans un corps algébriquement clos de caractéristique p pour une infinité de nombres premiers p.

Utiliser ce principe pour montrer que tout application polynomiale de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}^m$ injective est nécessairement surjective.