Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2014/2015

Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles

Feuille 4 : Compacité ; Löwenheim–Skolem ; types.

Exercice 1 Soit L un langage fini, et T une théorie dans le langage L. On suppose que, dans tout modèle de T, les sous-structures engendrées par un nombre fini d'éléments sont finies. Montrer qu'il existe une fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout n, une sous-structure engendrée par n éléments d'un modèle de T est de cardinal inférieur à $f(n)$.

Exercice 2 Considérons un langage L comprenant une infinité dénombrable de symboles de relation binaire ; $L = \{E_i \colon i \in \mathbb{N}\}$.

1. Ecrire les énoncés qui disent que pour tout $i \in \mathbb{N}$ E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe et que les classes de E_{i+1} sont obtenues en divisant chaque E_i-classe en exactement deux classes infinies.
2. On note $M_0 = \{f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\} \colon f \text{ est constante à partir d'un certain rang}\}$, qu'on munit d'une L-structure en définissant
$$\mathcal{M}_0 \models E_i(f,g) \Leftrightarrow \forall j < i \ f(j) = g(j) \ .$$
Montrer que $\mathcal{M}_0$ est un modèle des énoncés de (1). Ces énoncés et leur conséquences sont notés T dans la suite de l'exercice.
3. Disons qu'un modèle $\mathcal{M}$ de T est *riche* si pour tout $a \in M$ il existe une infinité de $b \in M$ tels que $\mathcal{M} \models E_i(a,b)$ pour tout $i \in \mathcal{M}$. Montrer que tout modèle dénombrable de T a une extension élémentaire riche det dénombrable.
4. Montrer que deux modèles riches sont ∞-équivalents, et en déduire que T est complète.
5. La théorie T est-elle $\aleph_0$-catégorique ?

Exercice 3 Soit $\mathcal{M}$ une L-structure, $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ et $p \in S_n(T)$. Supposons que pour chaque extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, il y a au plus un nombre fini de réalisations de p dans $\mathcal{N}$ (un tel type est dit *algébrique*).

1. Montrer qu'il existe une formule $\phi(\bar{x})$ qui n'est satisfaite que par un nombre fini d'éléments dans $\mathcal{M}$.
2. Montrer que toute réalisation de p dans une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ est nécessairement dans $\mathcal{M}$.
3. Soit $\phi(\bar{x}) \in p$ ayant un nombre fini m de réalisations dans $\mathcal{M}$, et telle que m soit minimal. Montrer que ϕ *isole* p, c'est-à-dire que p est l'unique type de $S_n(T)$ contenant ϕ.

Exercice 4

1. Pourquoi la théorie des relations d'équivalence ayant une infinité de classes toutes infinies est-elle complète ?

2. Montrer que cette théorie élimine les quantificateurs.
3. Combien cette théorie a-t-elle de 1-types, de 2-types, de 3-types ?

Exercice 5 Soit $L = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$ où les P_i sont des relations unaires. Soit T la théorie dans le langage L qui dit que les P_i sont deux à deux disjoints et que chaque P_i est infini.

1. Montrer que T est complète.
2. En vous inspirant de la preuve de la complétude, montrer que T élimine les quantificateurs.
3. Décrire $S_1(T)$. Est-ce que tous les types de $S_1(T)$ sont réalisés dans chacun des modèles de T ?

Exercice 6 Soit T la théorie des ordres totaux discrets sans extrémités dans le langage $\{<\}$.

1. Donner une axiomatisation de T.
2. Combien T a-t-elle de modèles dénombrables ?
3. Montrer que T n'élimine pas les quantificateurs.
4. On considère le langage $L = \{<, S\}$ où S est une fonction unaire et dans ce langage, la théorie $T' = T \cup \{\forall x\ x < S(x) \wedge \neg\exists y(x < y < S(x))$. Montrer que T' est complète et élimine les quantificateurs.
5. En déduire que T est également complète et décrire les n-types de T.
6. Une théorie est dite *modèle-complète* si pour tous modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de cette théorie, si $\mathcal{M}$ est sous-structure de $\mathcal{N}$ alors $\mathcal{M}$ est sous-structure élémentaire de $\mathcal{N}$. Montrer que T' est modèle-complète mais que T ne l'est pas.