Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2014/2015
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des modèles
Feuille 5 : révisons dans la joie.

Exercice 1 On considère à nouveau la théorie du graphe de Radó vue lors du premier TD : cette théorie, dans le langage $\{R\}$, où R est une relation binaire, dit que R est symétrique et irréflexive, et que pour tous ensembles finis disjoints X_1, X_2 de sommets il existe un point qui est R-lié à tous les éléments de X_1 et n'est R-lié à aucun élément de X_2. Montrer que T est complète, élimine les quanteurs et que tous les modèles de T sont ω-saturés.

Exercice 2 On considère les structures suivantes, dans le langage des corps : $\mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ (où $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$). Quelles structures de cette liste sont-elles ω-saturées ?

Exercice 3 Soit $\mathcal{M}$ une structure ω-saturée, $\mathcal{N}$ une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ et $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'élements de N. Montrer qu'il existe une famille $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $(m_0, \ldots, m_k)$ et $(n_0, \ldots, n_k)$ aient le même type.

Exercice 4 Soit le langage $L = \{<, c_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ où $<$ est une relation binaire et les c_i sont des symboles de constante. Soit T la théorie des ordres totaux denses sans extrémités telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on ait $c_i < c_{i+1}$.

1. Soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé de T. Montrer que l'ensemble A des éléments majorant tous les c_i n'a pas de plus petit élément.
2. Montrer que T est complète et élimine les quanteurs.
3. Construire un modèle dénombrable de T qui contient un plus petit majorant de la suite (c_i).
4. Montrer que T a exactement trois modèles dénombrables non isomorphes.
5. Montrer qu'il existe deux des modèles dénombrables non isomorphes qui se plongent l'un dans l'autre.

Exercice 5 Deux théories T_1, T_2 dans un même langage sont dites *compagnes* l'une de l'autre si tout modèle de l'une peut se plonger dans l'autre.

1. (a) Soit T_1, T_2 deux théories compagnes l'une de l'autre. Montrer qu'elles ont les mêmes conséquences universelles [1]
   (b) Soit T_1, T_2 deux théories dans le même langage telles que toute conséquence universelle de T_2 est également conséquence de T_1. Montrer que tout modèle de T_1 se plonge dans un modèle de T_2.

1. une *conséquence universelle* de T est un énoncé θ de la forme $\forall x_1, \ldots, x_n \phi(x_1, \ldots x_n)$ et tel que $T \vdash \theta$.

(c) Conclure que deux théories sont compagnes l'une de l'autre si, et seulement si, elles ont les mêmes conséquences universelles.

2. Montrer que les groupes $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ ne sont pas élémentairement équivalents.
3. Montrer par un argument de compacité qu'il existe une extension élémentaire G de $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ contenant deux éléments a et b tels que les sous-groupes engendrés par a et b sont d'intersection triviale.
4. Montrer que $\langle \mathbb{Z} \times Z, 0, + \rangle$ se plonge dans G.
5. En déduire que les structures $\langle \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ et $\langle \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 0, + \rangle$ ont mêmes conséquences universelles (leurs théories sont compagnes l'une de l'autre).