Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2014/2015
Master 1 — Introduction à la logique mathématique

Théorie des ensembles
Feuille 6 : Ordinaux ; axiome du choix.

Exercice 1

1. Dans chacun des cas suivants, trouver un ensemble A de nombres rationnels tel que $(A, \leq_{\mathbb{Q}})$ soit isomorphe à l'ordinal α :
$$\alpha = \omega + 1 \ ; \quad \alpha = \omega \cdot 2 \ ; \quad \alpha = \omega^\omega \ .$$
2. Montrer que tout ensemble totalement ordonné dénombrable est isomorphe à un sous-ensemble de $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$.
3. Quels ensembles bien ordonnés sont-ils isomorphes à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ muni de son ordre usuel ?

Exercice 2

1. Démontrer que $\omega^\alpha \geq \alpha$ pour tout ordinal α.
2. On définit par récurrence $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$ et $\varepsilon_0 = \sup\{\alpha_n \colon n < \omega\}$.
Montrer que ε_0 est le plus petit ordinal satisfaisant $\omega^\alpha = \alpha$.
3. Soit $F \colon ON \to ON$ une relation fonctionnelle telle que F soit croissante et continue aux ordinaux limites, c'est-à-dire que si λ est limite alors $F(\lambda) = \sup_{\alpha<\lambda} F(\alpha)$. Montrer que pour tout ordinal α il existe un plus petit $\beta \geq \alpha$ tel que $F(\beta) = \beta$.

Exercice 3

1. Montrer que l'on peut définir une opération $\ominus$ sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux α, β on ait :
   - $\alpha \ominus \beta = 0$ si $\alpha < \beta$
   - $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$ si $\alpha \geq \beta$.

   Donner un exemple d'ordinaux $\alpha > \beta$ tels qu'il n'existe pas d'ordinal γ tel que $\gamma + \beta = \alpha$.
2. Soient α et β deux ordinaux avec $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.
(Indication : on pourra d'abord montrer qu'il existe γ' tel que $\alpha < \beta \cdot \gamma'$ et que le plus petit tel γ' est successeur).

Exercice 4

1. Montrer que pour tout ordinal α il existe un unique couple (n_1, α_1) (où α_1 est un ordinal et n_1 un entier non nul) tel que $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 \leq \alpha < \omega^{\alpha_1} \cdot (n_1 + 1)$.
2. En reprenant les notations précédentes, montrer qu'il existe un unique $\beta_1 < \omega^{\alpha_1}$ tel que $\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \beta_1$.
3. Montrer que, pour tout ordinal $\alpha \neq 0$, on peut écrire α de manière unique sous la forme
$$\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m} \cdot n_m \ .$$
où $\alpha_1 > \ldots > \alpha_m$ sont des ordinaux et $n_1, \ldots, n_m$ des entiers non nuls. On appelle la formule ci-dessus le *développement de Cantor* de α.

4. Montrer que les ordinaux de la forme ω^α sont les ordinaux β tels que $\gamma + \beta = \beta$ pour tout $\gamma < \beta$.
5. En déduire le développement de Cantor de $\alpha + \beta$ connaissant les développements de Cantor de α et β (on donnera des exemples).
6. Donner le développement de Cantor de l'ordinal ε_0 défini à l'exercice précédent.

Exercice 5 On définit une *suite de Goodstein faible* de la façon suivante : étant donné un terme initial u_0, on écrit u_0 en base 2 : $u_0 = a_n 2^n + \ldots + a_0$, et u_1 est l'entier obtenu en posant $u_1 = (a_n \cdot 3^n + \ldots a_0) - 1$; ensuite u_2 est obtenu en remplaçant la base 3 par la base 4, et ainsi de suite. Par exemple, avec $u_0 = 266$, on a successivement :

$$u_0 = 266 = 2^8 + 2^3 + 2^1; \quad u_1 = 3^8 + 3^3 + 2 = 6590; \quad u_2 = 4^8 + 4^3 + 1 = 65601 \ldots$$

Et ainsi de suite (par exemple, toujours avec le même u_0, on obtient $u_{10} = 429982475$)

1. Faire une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
2. Maintenant, on considère une suite d'ordinaux définie comme suit : α_0 est obtenu en remplaçant les 2^k dans le développement binaire de u_0 par des ω (dans notre exemple, $\alpha_0 = \omega^8 + \omega^3 + \omega$) ; de même α_n est obtenu en remplaçant chaque $(n+2)^k \cdot i$ dans le développement en base $(n+2)$ de u_n par $\omega^k \cdot i$. Montrer que, si $\alpha_n > 0$, alors $\alpha_{n+1} < \alpha_n$; et que $u_n = 0$ si et seulement si $\alpha_n = 0$.
3. Qu'en concluez vous ?

Note : une suite de Goodstein est obtenue de manière analogue à ce qui est décrit plus haut, mais à chaque étape on écrit u_n en base n de manière « héréditaire », conduisant à une croissance apparemment très rapide. Pourtant, la même idée que ci-desus permet de montrer que ces suites sont nulles à partir d'un certain rang. Mais pour le démontrer on a besoin d'une "récurrence jusqu'à ε_0" (dans le cas faible on n'a besoin d'aller que jusqu'à ω^ω) et l'arithmétique de Peano ne permet pas de conduire une telle récurrence. On[1] peut démontrer que ses axiomes ne suffisent pas pour prouver que les suites de Goodstein fortes tendent vers 0.

Exercice 6 L'axiome du choix peut s'énoncer sous la forme suivante :
(AC) *Pour tout ensemble a dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux il existe un ensemble b dont l'intersection avec chacun des éléments de a est un singleton.*
Une *fonction de choix* sur un ensemble a est une application $\varphi\colon \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ telle que pour tout $x \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ on ait $\varphi(x) \in x$.
On se place maintenant dans ZF ; montrer qu'alors AC est équivalent à chacun des énoncés suivants :

1. Pour tout ensemble a il existe au moins une fonction de choix sur a.
2. Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles non vides alors $\Pi_{i \in I} a_i$ est non vide.
3. Pour tous les ensembles x, y et toute application surjective $g\colon x \to y$, il existe une application $h\colon y \to x$ telle que $g \circ h$ soit l'application identique de y dans y.

Exercice 7 Soit $(A, <)$ un ensemble totalement ordonné. Prouver l'équivalence suivante : $<$ est un bon ordre sur A si, et seulement si, il n'existe pas de suite $(a_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$ strictement décroissante pour $<$.
Avez-vous utilisé l'axiome du choix ?

1. Au sens de « des gens peuvent le faire », pas de « votre enseignant peut le faire » ...