Algèbre, Master 1 **27 octobre 2008**
2008–2009

TD3 : Groupes résolubles, théorème de Sylow

Exercice 1 Montrer que $\mathfrak{S}_5$ possède un sous groupe d'ordre 20. Est-ce encore vrai pour $\mathfrak{A}_5$?

Exercice 2 Déterminer les groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$.

Exercice 3 Un groupe d'ordre 105 peut-il être simple ? Est-il toujours résoluble ?

Exercice 4 Soit G un groupe fini et p un nombre premier.

(a) Soit $N \lhd G$ et $P \in Syl_p(N)$, montrer que $G = N_G(P).N$.

(b) Soit $P \in Syl_p(G)$ et $U < G$ tel que $N_G(P) \subset U$, montrer que $N_G(U) = U$.

(c) Soit $N \lhd G$ tel que $|G/N| = p^n$ avec $n \geqslant 2$, montrer qu'il existe $U \lhd G$ tel que $|G/U| = p$.

Exercice 5 Dans cet exercice G désigne un groupe non abélien d'ordre 182.

(a) Montrer que G a un unique 7-Sylow, on le noté S et que le nombre de 13-Sylow de G est égal à 1 ou 14.

(b) Soit T un 13-Sylow. Montrer que $H = ST$ n'a qu'un seul 13-Sylow. En déduire le nombre de 13-Sylow de G.

(c) Montrer que H est sous-groupe distingué dans G.

(d) Soit x un élément d'ordre 2 de G. Prouver que G est isomorphe au produit semi-direct $H \rtimes < x >$.

(e) Montrer qu'à isomorphisme près, il existe exactement 4 groupes d'ordre 182 et qu'ils sont classés par leur nombre d'éléments d'ordre 2.

Exercice 6 Soit p un nombre premier.

(a) Montrer que les groupes d'ordre p^2 sont abéliens (Indication : si G est un groupe de centre Z avec G/Z est cyclique, montrer que G est abélien).

(b) Trouver à isomorphisme près les groupes d'ordre p^2.

Exercice 7 Soit p premier $p \geq 3$, et G un groupe d'ordre p^3. On suppose qu'il existe $x \in G$ d'ordre p^2 et on note $H =< x >$.

(a) Montrer que H est distingué dans G.

Soit $y \notin H$. On suppose que G est non cyclique.

(b) Montrer que $y^p \in H$. En posant $y^p = x^m$ montrer que $p|m$.

(c) On pose $y^{-1}xy = x^n$. Calculer $y^{-l}x^r y^l$ en fonction de l, r, n, x.

(d) On cherche $k \in \mathbb{N}$ tel que yx^k soit d'ordre p. Montrer que cela revient à résoudre en k l'équation suivante dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$:

$$m + k(1 + n + \ldots + n^{p-1}) = 0.$$

Montrer que cette équation a toujours des solutions.

(e) En déduire la liste à isomorphisme près de tous groupes d'ordre p^3 .

Exercice 8 Soient p, q et r trois nombres premiers distincts.

(a) Un groupe d'ordre pq ou pq^2 ou pqr est résoluble.

(b) Montrer que les groupes suivants ne sont pas simples, dans quel cas peut-on dire qu'ils sont résolubles ?

(i) un groupe d'ordre $p^\alpha q$ (avec $p > q$) ;

(ii) un groupe d'ordre $p^\alpha q^\beta$ (avec $p^\alpha < q + 1$) ;

(iii) un groupe d'ordre $p^\alpha q$ (avec $p^\alpha \not| \, (q-1)!$).

Exercice 9 Montrer que les groupes d'ordre < 60 sont tous résolubles (indication : appliquer l'exercice précédent).

Exercice 10 Soit G un groupe simple d'ordre 60.

(a) Soit H un sous-groupe propre d'indice m dans G. Montrer que G s'injecte dans $\mathfrak{S}_m, m \geq 5$.

(b) Si p est un nombre premier qui devise 60, notons par N_p le nombre de p-Sylow de G. Trouver N_5, N_3 et N_2.

(c) Montrer qu'il existe deux 2-Sylow P et P' tels que $P \cap P' \cong \mathbb{Z}_2$.

(d) Montrer que le normalisateur de $P \cap P'$ dans G est d'ordre 12.

(e) Conclure que $G \cong \mathfrak{A}_5$.

Exercice 11 (Groupe de Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$)
Soient p, q deux nombres premiers ($q \neq 2$), r un entier positif, on pose $l = p^r$. Le but de l'exercice est de montrer que les q-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$ sont abéliens ($\mathbb{F}_{p^r}$ désigne le corps à p^r éléments).

(a) On suppose que $p = q$, exhiber un p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

(b) Si $q|p-1$, en utilisant le fait que $\mathbb{F}_l^*$ est cyclique construire un q-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^r})$.

(c) Si $q|p+1$, utiliser la multiplication de $\mathbb{F}_{l^2}$ sur lui même pour trouver un q-Sylow (ind : $\mathbb{F}_{l^2}$ est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{F}_l$). Conclure

(d) Le résultat est-il encore vrai pour $q = 2$ ou pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_{p^r})$?

Exercice 12 (Les sous-groupes transitifs résolubles de $\mathfrak{S}_p$)
Soit p un nombre premier, on note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et on identifie $\mathfrak{S}_p$ avec le groupe des bijections de $\mathbb{F}_p$. On note $\mathrm{GA}(p)$ le groupe des bijections affines de $\mathbb{F}_p$, i.e. l'ensemble des applications $f_{a,b} : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ de la forme $f_{a,b} = ax + b$ (où a et b sont dans $\mathbb{F}_p$ et où a est non nul). Enfin on pose $t = f_{1,1}$ et $m_a = f_{a,0}$.

(a) Montrer que le groupe $GA(p)$ est résoluble (indication montrer que tout élément s'écrit de manière unique sous la forme $t^b m_a$ et que le groupe engendré par t est distingué).

(b) Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ transitif, montrer que tout sous-groupe distingué non trivial de G est encore transitif.

(c) Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ transitif résoluble, on note $(H_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ la suite décroissante des groupes dérivés ($H_r = \{1\}$).

  (i) Montrer que H_{r-1} est conjugué au groupe $< t >$.

  (ii) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ tel que $\sigma t \sigma^{-1} \in \mathrm{GA}(p)$, montrer que σ est dans $\mathrm{GA}(p)$.

  (iii) En déduire que G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GA}(p)$.

(d) Soit G un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_p$, montrer que G est résoluble si et seulement si l'identité est le seul élément de G ayant deux points fixes (indication pour la réciproque montrer que G a un élément sans point fixe et que c'est un p-cycle).

Exercice 13 (Les p-Sylow de $\mathfrak{S}_n$)
Soient p un nombre premier, n un entier, pour k un entier on notera $\mathrm{val}_p(k)$ la valuation p-adique de k (i.e. le plus grand entier α tel que $p^\alpha | k$).

(a) Montrer la formule $\mathrm{val}_p(n!) = \displaystyle\sum_{i \geqslant 0} \left[\frac{n}{p^i}\right]$ (où [.] désigne la partie entière), en déduire $\mathrm{val}_p((p^\alpha)!)$.

(b) Exhiber un p-Sylow de $\mathfrak{S}_p$, un de $\mathfrak{S}_{p^2}$ et finalement un de $\mathfrak{S}_{p^\alpha}$ ($\alpha > 0$).

(c) Si on écrit $n = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k$ (où $0 \leqslant a_i < p$) déterminer $\mathrm{val}_p(n!)$ en fonction des a_i et de p. En déduire la forme d'un p-Sylow de $\mathfrak{S}_n$.