Algèbre, Master 1 **24 novembre 2008**
2008–2009

TD3 : Groupes de polyèdres

Notations et rappels : *Le groupe orthogonal* $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ *agit sur la sphère unitaire* S^2 *dans* $\mathbb{R}^3$. *Rappelons que chaque* $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}), g \neq Id$, *est une rotation autour d'un axe et que ce dernier coupe* S^2 *en deux points appelés pôles de* g. *Si* Q *est un polyèdre régulier inscrit dans* S^2 *on note* $\mathrm{Iso}^+(Q) = \{g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) : gQ = Q\}$ *et* $\mathrm{Iso}(Q) = \{g \in \mathrm{O}(3,\mathbb{R}) : gQ = Q\}$. *On a cinq polyèdres réguliers : tetraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre. Dans chacun des cas on utilise les notations* $Q = T, C, O, D$ *et* I, *respectivement.*

Exercice 1 Montrer que $\mathrm{Iso}^+(Q)$ est un sous-groupe d'indice deux dans $\mathrm{Iso}(Q)$.

Exercice 2 Soit σ et $\tau \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \setminus \{Id\}$ et soit $\{\pm p(\sigma)\}$ et $\{\pm p(\tau)\}$ les pôles de σ et τ, respectivement.

1. Montrer que $\{\pm \sigma p(\tau)\}$ sont les pôles de $\sigma\tau\sigma^{-1}$.
2. Montrer que si $\sigma\tau = \tau\sigma$ alors $\sigma\{\pm p(\tau)\} = \{\pm p(\tau)\}$ et $\tau\{\pm p(\sigma)\} = \{\pm p(\sigma)\}$.
3. Montrer que $\sigma\tau = \tau\sigma$ si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite :
   (a) σ et τ ont le même axe de rotation,
   (b) les axes de rotations de σ et τ sont perpendiculaires et σ et τ sont des rotations à l'angle π.
4. Déduire de 3. que si $\sigma\tau = \tau\sigma$ et les axes de rotations de σ et τ sont différents alors σ, τ et $\sigma\tau$ sont tous d'ordre deux. Montrer que dans ce cas l'axe de rotation de $\sigma\tau$ et perpendiculaire aux axes de rotations de σ et τ.
5. Soit G un sous-groupe abélien (fini ou infini) de $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Montrer que seulement les deux cas suivants sont possibles :
   (a) Tous éléments de G ont le même axe de rotation. En particulier, si G est fini alors il est cyclique.
   (b) G est isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ et les éléments non-triviaux de G sont des rotations à l'angle π autour des axes mutuellement perpendiculaires.
   (Indication : On pourrait utiliser 4.)

Exercice 3 Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini P et soit m le nombre d'orbites de G sous cette action. On définit *le caractère de permutation* $\chi : G \to \mathbb{N}$, $\chi(g) \overset{def}{=} |\{a \in P : ga = a\}|$. On se propose de démontrer *la formule de Cauchy-Frobenius* :

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g).$$

1. Soit $\Omega = \{(g,a) \in G \times P : ga = a\}$. On définit $\varphi : \Omega \to G, \varphi((g,a)) \overset{def}{=} g$ et $\psi : \Omega \to G, \psi((g,a)) \overset{def}{=} a$. Montrer que

(a) $|\Omega| = \sum_{g\in G} |\varphi^{-1}(g)| = \sum_{a\in P} |\psi^{-1}(a)|$;

(b) $|\varphi^{-1}(g)| = \chi(g)$ et $|\psi^{-1}(a)| = |G_a|$, où G_a est le stabilisateur de a dans G ;

(c) $|G| = \sum_{b\in\mathcal{O}(a)} |G_b|$, où $\mathcal{O}(a)$ est l'orbite de a.

2. Conclure.

Exercice 4 Soit G un sous-groupe fini non-trivial de $SO(3,\mathbb{R})$ et P l'ensemble des pôles des éléments dans $G \setminus \{Id\}$.

1. Montrer que G agit sur P.
2. Soit m le nombre des orbites pour l'action de G sur P et soit $a_1, \cdots, a_m \in P$ des représentants des orbites. Montrer que

$$m = 2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) + \frac{1}{|G_{a_1}|} + \cdots + \frac{1}{|G_{a_m}|}.$$

(Indication : On peut utiliser la formule de Cauchy-Frobenius.)

3. Montrer que $2 \leq m \leq 3$.
4. Montrer que si $m = 2$ alors $G = < g >$, i.e. G est le groupe de rotations d'un polygône régulier inscrit dans S^2 et contenant 0.

A partir de maintenant $m = 3$.

5. On note $n_i = |G_{a_i}|,\ i = 1, 2, 3$ et on suppose que $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Il est facile de voir que $n_1 \geq 2$. Montrer que $n_1 = 2$ et $2 \leq n_2 \leq 3$.
6. Soit $n_1 = n_2 = 2$. Montrer que si $n_3 > 2$ alors G coïncide avec le groupe de symétries d'un polygône régulier à n_3 côtés inscrit dans S^2 et que si $n_3 = 2$ alors $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (voir la partie 5 de l'exercice 2.)
7. Si $n_2 = 3$ montrer que $3 \leq n_3 \leq 5$ et trouvez l'ordre du groupe G pour chaque valeur de n_3. (Remarque : Nous avons démontré pendant le cours que $G = \mathrm{Iso}^+(T)$ si $n_3 = 3$, $G = \mathrm{Iso}^+(C) = \mathrm{Iso}^+(O)$ si $n_3 = 4$ et $G = \mathrm{Iso}^+(D) = \mathrm{Iso}^+(I)$ si $n_3 = 5$.)

Exercice 5 Soit a le nombre des arêtes d'un polyèdre régulier Q.

1. Montrer que $\mathrm{Iso}^+(Q)$ agit transitivement sur l'ensemble des arêtes de Q.
2. Montrer que $|\mathrm{Iso}^+(Q)| = 2a$.

Exercice 6 1. Soit g et $g' \in \mathrm{Iso}^+(Q) \setminus \{Id\}$ et l et l' sont leur axes de rotations respectifs. Montrer que g et g' sont conjugués si et seulement si $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(g')$ et $l' = hl$, où $h \in \mathrm{Iso}^+(Q)$.

2. Montrer que

(a) $\mathrm{Iso}^+(T)$ contient exactement trois sous-groupes d'ordre deux et ils sont deux à deux conjugués ;

(b) Les sous-groupes d'ordre deux dans $\mathrm{Iso}^+(C)$ sont répartis dans deux classes de conjugaison : une conténante 6 sous-groupes et l'autre conténante 3 sous-groupes. De plus, $\mathrm{Iso}^+(C)$ contient exactement trois sous-groupes cycliques d'ordre 4 et ils forment une classe de conjugaison ;

(c) $\mathrm{Iso}^+(D)$ contient exactement 15 sous-groupes d'ordre deux et ils sont deux à deux conjugués.

Exercice 7 Exhiber les rotations qui forment un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{Iso}^+(I)$. (Indications : $\mathrm{Iso}^+(I) \cong A_5$ et, aussi, on pourrait utiliser la partie 5(b) de l'Exercice 2.)