Algèbre 1 **15 décembre 2008**
2008–2009

TD5 : Groupes abéliens et modules sur des anneaux principaux

Exercice 1

1. Soit G un groupe abélien de type fini, montrer que si G n'a pas d'éléments d'ordre fini alors G est libre (comme $\mathbb{Z}$ module).
2. Le groupe abélien $(\mathbb{Q}, +)$ est-il un $\mathbb{Z}$ module libre, avec ou sans torsion, de type fini ?
3. Montrer que $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ est isomorphe au groupe additif des polynômes à coefficiants entiers. En déduire que c'est un groupe abélien libre (i.e. un $\mathbb{Z}$ module libre).

Exercice 2 Trouver les facteurs invariants du groupe $G = \mathbb{Z}_{72} \oplus \mathbb{Z}_{84}$. Est-ce que $G \cong \mathbb{Z}_{36} \oplus \mathbb{Z}_{168}$?

Exercice 3 Classifier à isomorphisme près les groupes abéliens d'ordre 16, puis ceux d'ordre 36.

Exercice 4 Montrer que si A et B sont des groupes abéliens finis et $A \oplus A \cong B \oplus B$ alors $A \cong B$.

Exercice 5 Soit M un $\mathbb{Z}$-module libre avec une base $\{e_1, e_2, e_3\}$. On considère le sous-module : $U =< 3e_1 - 12e_2 + 10e_3, -12e_1 + 64e_2 - 60e_3, 10e_1 - 60e_2 + 60e_3 >_{\mathbb{Z}} \subset M$.
Trouver les invariants de U et montrer que $M/U \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. (Indication : utiliser des transformations élémentaires pour transformer la matrice des coefficients des vecteurs engendrant U.)

Exercice 6 Soit $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ un morphisme de groupes. Montrer que si φ est surjectif, il est alors injectif.

Exercice 7 Soient A et B deux groupe abéliens. $\mathrm{Hom}(A, B)$ l'ensemble des morphismes de A dans B.

1. Vérifier que $\mathrm{Hom}(A, B)$ a une structure de groupe abélien.
2. Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) \cong A[m] = \{a \in A, ma = 0\}$.
3. Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où $d = \mathrm{pgcd}(n, m)$.
4. Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$.

5. Montrer que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
6. Si $A_1, \cdots, A_k$ et $B_1, \cdots, B_l$ sont des groupes abéliens alors prouver que $\mathrm{Hom}(A, \oplus_{j=1}^{l} B_j) \cong \oplus_{j=1}^{l} \mathrm{Hom}(A, B_j)$ et que $\mathrm{Hom}(\oplus_{i=1}^{k} A_i, B) \cong \oplus_{i=1}^{k} \mathrm{Hom}(A_i, B)$.
7. Si $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ trouver les facteurs invariants de $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}$, A un anneau principal, et M et N deux sous modules de A-module A^n. Montrer qu'un automorphisme de A^n envoyant M sur N existe si et seulement si M et N ont les mêmes facteurs invariants.

Exercice 9 (*Généralization de l'exercice 12 de la fiche 5*) Soient $F \subset K$ une extension finie de corps et $\varphi : K \to \mathrm{End_F(K)}$, où $\varphi(x)y = xy$.

1. Montrer que φ est un morphism injectif des anneaux.
2. Pour $x \in K$ on définit *la trace* $T(x)$ (respectivement, *la reduced norme* $N(x)$) de x comme la trace (respectivement, le déterminant) de l'opérateur linéaire $\varphi(x)$. Montrer que $T : (K, +) \to (F, +)$ et $T : K^* \to F^*$ sont morphisms de groupes.
3. Montrer que $< x, y >= T(xy)$, où x et $y \in K$, est une forme bilinéaire, symétrique et non-dégénérée sur le F-espace vectoriel K.
4. Soit L un corps tel que $F \subset L \subset K$. Montrer que si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est une base de F-espace vectoriel L et $\beta_1, \dots, \beta_m$ est une base de L-espace vectoriel K alors $\{\alpha_i\beta_j, \forall i, \forall j\}$ est une base de F-espace vectoriel K.
5. Soit $F = \mathbb{Q}$ et $\mathcal{O}$ l'anneau des éléments entiers de K. (On dit que $\alpha \in K$ est *entier* si $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini.)
   (i) Montrer que si $\alpha \in \mathcal{O}$ alors il existe une base de K sur $\mathbb{Q}$ dans laquelle $\varphi(\alpha)$ se répresente comme une matrice à coéficients dans $\mathbb{Z}$. En particulier, $T(\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.
   (ii) Montrer que K admet une base $e_1, \dots, e_r$ où tous $e_i \in \mathcal{O}$.
   (iii) Montrer que $\mathcal{O}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre. (Indication : Écrivez les éléments de $\mathcal{O}$ dans la base dual de $e_1, \dots, e_r$ de (ii).)