Algèbre, Master 1 **6 octobre 2008**
2008–2009

TD2 : Produits semi-directs, actions de groupes

Exercice 1 On se donne N et H deux groupes, $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme de groupe et on définit sur $N \times H$ la loi de composition suivante :

$$(n,h)(n',h') = (n\varphi(h)(n'), hh')$$

(a) Montrer que cela muni $N \times H$ d'une structure de groupe, on note $N \rtimes_\varphi H$ le groupe ainsi obtenu, cette loi est appelée produit semi-direct. (Quand φ est explicit on écrit $N \rtimes H$ au lieu de $N \rtimes_\varphi H$.)

(b) Montrer que H et N s'injectent dans $N \rtimes_\varphi H$ et que H n'est pas distingué lorsque $\varphi \neq Id$.

(c) Montrer qu'on a la suite exacte d'homomorphismes :

$$1 \to N \xrightarrow{i} N \rtimes_\varphi H \xrightarrow{\pi} H \to 1,$$

où $i(n) \overset{def}{=} (n, 1_H)$ et $\pi((n,h)) \overset{def}{=} h$.

(d) On considère une suite exacte des groupes

$$1 \to T \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \to 1$$

et on suppose qu'il existe un sous-groupe K' de G tel que la restriction $\beta_{|K'}$ soit un isomorphisme $K' \to K$. Montrer que G est naturellement isomorphe à un produit semi-direct.

(e) On suppose que β est un automorphisme de H. Montrer que si $\psi = \varphi \circ \beta^{-1}$, l'application $(n,h) \to (n, \beta(h))$ induit un isomorphisme de $N \rtimes_\varphi H$ sur $N \rtimes_\psi H$.

(f) Si H et K sont des sous-groupes de G tels que $K \lhd G$, $K \cap H = \{e\}$ et $G = KH$ montrer que $G \cong K \rtimes H$.

Exercice 2 Soit K un corps commutatif. On considère la suite exacte :

$$1 \to SL(2,K) \xrightarrow{i} GL(2,K) \xrightarrow{\det} K^* \to 1,$$

où i est l'homomorphisme injectif naturel.

(a) Montrer que $GL(2,K)$ est le produit semi-direct de $SL(2,K)$ par K^*.

(b) Déterminer les K pour lesquels $GL(2,K)$ est isomorphe au produit direct de $SL(2,K)$ et un autre sous-groupe H de $GL(2,K)$. (Indication : Quel est le centre de $GL(2,K)$?)

Exercice 3 Soit P_n un polygone régulier à n côtés du plan euclidien centré en 0. On note D_n le groupe des isométries du plan préservant P_n (D_n est appelé le n-ieme groupe diédral).

(a) Montrer que D_n possède un sous groupe D_n^+ isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et un sous groupe S d'ordre 2 non inclus dans D_n^+.

(b) Montrer que D_n est d'ordre $2n$.

(c) Montrer que D_n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4 (Encore le groupe symétrique)

(a) Montrez que $\mathfrak{S}_n \cong \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) Déterminer le centre de $\mathfrak{S}_n$ et de $\mathfrak{A}_n$.

(c) Montrer que les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_n$.

(d) On désigne par $D(G)$ le groupe dérivé (ou le commutateur) d'un groupe de G. (Rappelons que $D(G)$ est engendré par les commutateurs $\{\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma\tau : \forall\sigma,\tau \in G\}$). Montrer que $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ si $n \geqslant 3$, que $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ si $n \geqslant 5$, et que $D(\mathfrak{A}_4) = \mathfrak{B}_4$. (Le groupe $\mathfrak{B}_4 = \{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ s'appelle *groupe de Klein.*)

(e) Déterminer tous les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ et de $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 5 On définit $G = PSL_2(\mathbb{F}_p) = SL_2(\mathbb{F}_p)/\{\pm 1\}$ le *groupe spécial projectif* de $\mathbb{F}_p^2$.

(a) Calculer l'ordre de G.

(b) Montrer que G agit sur les droites vectoriel de $\mathbb{F}_p^2$. En déduire l'existence d'un homomorphisme injectif de G dans $\mathfrak{S}_{p+1}$.

(c) À quels groupes sont isomorphes $PSL_2(\mathbb{F}_2)$ et $PSL_2(\mathbb{F}_3)$? Sont-ils simples ?

Exercice 6 Soit G un groupe d'ordre p^n, où p est un nombre premier. (On dit que G est un p-groupe.)

(a) En utilisant l'action par conjugaison, montrer qu le centre de G n'est pas réduit à l'element neutre.

(b) En déduire que G possède des sous-groupes distingués de tous ordres divisant $|G|$.

(c) Montrer que, à isomorphisme près, il existe seulement deux groupes d'ordre p^2 : $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 7 Soit G un groupe, pour tout sous-groupe H, G agit sur les classes à gauche de G modulo H par *translation* (i.e. $g.g'H = gg'H\ \forall g, g' \in G$). Cela définit un morphisme

$$\rho : G \to \mathfrak{S}_{[G:H]}$$

Le noyau K de ce morphisme est le plus gros sous-groupe distingué de G contenu dans H. Voici quelques applications :

(a) Soit G un groupe fini, p le plus petit diviseur premier de $|G|$. Montrer que tout sous-groupe d'indice p est normal.

(b) Montrer que tout groupe infini possédant un sous-groupe propre d'indice fini n'est pas simple.

(c) Montrer qu'un sous-groupe H d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$. (Indication : Le groupe $\mathfrak{A}_{\mathfrak{n}}, n \geq 5$, est simple.)

(d) Montrer que $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_5$ et $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ à $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 8 (a) Montrer que si G est un groupe fini et H un sous-groupe strict de G, alors G n'est pas la réunion des conjugués de H.

(b) Application : montrer que si G, un groupe fini, agit transitivement sur X, un ensemble fini ayant au moins deux points, alors il existe au moins un élément de G ne fixant aucun point.

Exercice 9 On note $G = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ le groupe des matrices à coefficients entiers de déterminant égal à 1, modulo son centre, et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im m(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré [1]. Le but de cet exercice est de montrer que G est engendré par $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que G agit sur $\mathbb{H}$ par homographies. (On sait d'analyse complexe que si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice réelle de determinant 1 alors l'application $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ est une transformation de $\mathbb{H}$ appelée *homographie associée à* g.)

(b) On note $D = \{z \in \mathbb{H}, |z| \geqslant 1 \text{ et } |\Re e(z)| \leqslant 1/2\}$ et G' le sous-groupe de G engendré par S et T. Montrer que $\forall z \in \mathbb{H}, \exists g \in G', g(z) \in D$. (Indication : Si g est comme dans la partie (a), en utilisant que $\Im m(gz) = \frac{\Im m(z)}{|cz+d|^2}$ on peut choisir g de telle façon que $\Im m(gz)$ soit minimal et que $\Re e(gz) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.)

(c) Montrer que si deux points distincts z et z' de D sont congrus modulo G, alors soit $\Re e(z) = \pm 1/2$ et $z = z' \pm 1$, soit $|z| = 1$ et $z' = -1/z$. (Indication : En supposant que $\Im m(gz) \geq \Im m(z)$ on peut déduire que $c = 0, 1$ ou -1.)

(d) Montrer que le stabilisateur pour G d'un point intérieur à D est réduit à l'identité. (Indication : Voir la démonstration de (c).)

(e) Conclure.

[1] Jules Henri Poincaré (1854 Nancy, 1912 Paris) élève de Charles Hermite. Avec Hilbert, Poincaré peut être considéré comme un des plus grands mathématiciens à la charnière du 20[e] siècle. Outre la topologie qu'il va développer, dès 1895, comme une branche à part entière des mathématiques, ses travaux couvrent l'analyse (équations différentielles pour lesquelles il donne, en 1881, une méthode générale de résolution), les fonctions elliptiques et automorphes suite aux travaux de Fuchs, la géométrie non euclidienne (appliquée à la théorie des formes quadratiques), la géométrie différentielle, la mécanique analytique, la mécanique céleste (le problème des trois corps), la physique mathématique, l'électricité (on lui doit la résolution de l'équation dite des télégraphistes : description de la propagation électrique dans un cable conducteur), la théorie des probabilités.