Algèbre **12 janvier 2009**
2008–2009

Examen d'Algèbre

Durée 3 heures

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Problème 1 (*4 points*)

1. Trouver les facteurs invariants du groupe $\mathbb{Z}_{54} \times \mathbb{Z}_{360}$.
2. Classifier à isomorphisme près les groupes abéliens d'ordre 360.

Problème 2 (*4 points*)

1. Soit
$$f = X_1^2X_2^2 + X_1^2X_3^2 + X_1^2X_4^2 + X_2^2X_3^2 + X_2^2X_4^2 + X_3^2X_4^2 \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4].$$
Exprimer le polynôme f en fonction des polynômes symétriques élémentaires.
2. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines complexes du polynôme $X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 5$. Sans chercher les valeurs des racines $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 calculer
$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3\alpha_4} + \frac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_2\alpha_4} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{\alpha_2\alpha_3} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_4} + \frac{\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1\alpha_3} + \frac{\alpha_3\alpha_4}{\alpha_1\alpha_2}.$$

Problème 3 (*5 points*)

1. Soit C un cube centré dans l'origine de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Rappelons que le groupe d'isométries positives de C est défini par $\mathrm{Iso}^+(C) = \{g \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) : gC = C\}$. Répondre par des nombres concrets (c.à.d. vous n'êtes pas obligés de donner des preuves) aux questions suivantes :
   (a) Quel est l'ordre de $\mathrm{Iso}^+(C)$?
   (b) Combien y a-t-il des éléments d'ordre 2, 3 et 4, respectivement, dans le groupe $\mathrm{Iso}^+(C)$?
   (c) Combien des classes de conjugaison des éléments d'ordre 2, 3 et 4, respectivement, y a-t-il dans le groupe $\mathrm{Iso}^+(C)$? (Rappelons que la classe de conjugaison contenant l'élément g d'un groupe G est par définition l'ensemble $\{xgx^{-1} : x \in G\}$.)
2. Répondre aux mêmes questions que dans la partie 1 du problème en remplaçant $\mathrm{Iso}^+(C)$ par $\mathrm{Iso}^+(O)$, où O est un octaèdre régulier centré dans l'origine de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

Problème 4 (*6 points*) Soit G un groupe d'ordre 2009 ($= 7^2.41$).

1. Montrer que $G \cong P \times Q$, où P est un groupe d'ordre 41 et Q est un groupe d'ordre 49. En déduire que chaque groupe d'ordre 2009 est abélien.
2. Classifier à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 2009.
3. Soit P et Q comme dans la partie 1.
   (a) Montrer que si $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, alors $\sigma(P) = P$ et $\sigma(Q) = Q$. En déduire que tout automorphisme σ de G induit un automorphisme σ_P de P et un autre σ_Q de A, chacun uniquement défini.
   (b) Montrer que l'application
   $$\begin{array}{rcccl} \Sigma & : & \mathrm{Aut}(G) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(P) \times \mathrm{Aut}(Q) \\ & & \sigma & \longmapsto & (\sigma_P, \sigma_Q) \end{array}$$
   est un homomorphisme.
   (c) Vérifier que l'homomorphisme Σ du point (b) est un isomorphisme.
4. (a) Quel est l'ordre de $\mathrm{Aut}(Q)$ quand Q est cyclique ? Montrer que si Q est cyclique alors $\mathrm{Aut}(Q)$ est cyclique aussi.
   (b) Montrer que si Q n'est pas cyclique alors $\mathrm{Aut}(Q)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_7)$, où $\mathbb{F}_7$ est le corps de 7 éléments. (Indication : on peut démontrer que chaque automorphisme du groupe Q induit un automorphisme de l'espace vectoriel de dimension deux sur le corps $\mathbb{F}_7$.)
   (c) Quel est l'ordre de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_7)$?

Problème 5 (*7 points*)

1. Soit A un anneau commutatif non-nul et A^* l'ensemble de ses éléments inversibles. Rappelons qu'un idéal M de A est dit *maximal* si $M \neq A$ et il n'y a pas des idéaux I de A tels que $M \subsetneqq I \subsetneqq A$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) A a un seul idéal maximal ;
   (ii) il existe un idéal $M \neq A$ qui contient l'ensemble $A \setminus A^*$;
   (iii) $A \setminus A^*$ est un idéal ;
   (iv) pour tous a et b dans A, si $a + b = 1$ alors soit a soit b est inversible.
   Un anneau A satisfaisant les conditions (i)-(iv) s'appelle **local**.
2. Soit p un entier premier. On pose
   $$A = \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a,\ b \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p \nmid b \right\} .$$
   Il est facile de voir que A muni de la somme et du produit usuels des rationnels est un anneau. Montrer que A est local et déterminer son idéal maximal.
3. Soit p un entier premier et $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est local. Quel est son idéal maximal ?