Corrigé de l'examen du 7 novembre 2008

Problème 1

1.1 Exercez-vous si vous ne l'avez pas encore fait.

1.2 Soient g et A comme dans l'énoncé de l'exercice. Admettons aussi l'hypothèse énoncée, à savoir que $[A, G'] = 1$.

(a) Pour montrer que $C_A(g)$ est un sous-groupe distingué, nous suivrons l'indication en adoptant la même notation. Soulignons que beaucoup d'entre vous ont ignoré la subtilité dans l'indication, ce qui a compliqué nettement leur tache.

Soient donc $x \in C_A(g)$ et $y \in G$. Alors

$$[x, y^{-1}gy] = [x, g[g, y]] \overset{1.1}{=} [x, [g, y]][x, g]^{[g,y]}$$

L'élément x étant dans A, $[x, [g, y]] = 1$. Comme x centralise g, nous concluons que $[x, y^{-1}gy] = 1$.

La subtilité de l'indication est que c'est g qui est conjugué par y plutôt que x. C'est le contraire de ce que la plupart de vous ont fait. Il est vrai que c'est plus naturel de conjuguer x par y puisque l'objectif est de vérifier que $C_A(g) \lhd G$, mais cette conjugaison mène à des calculs compliqués. Après ces remarques sur la stratégie, finissons le raisonnement.

Nous avons montré ci-dessus que $[x, g^y] = 1$ pour tout $y \in G$. Or, $[x, g^y] = [x^{y^{-1}}, g]^y$. Par conséquent $[x^{y^{-1}}, g] = 1$. En d'autres termes, tout conjugué de x centralise g. Or, A étant distingué dans G, tout conjugué de x appartient à A. Ceci est suffisant pour conclure que $C_A(g) \lhd G$.

(b) Puisqu'en général l'inclusion

$$\{[g, a] : a \in A\} \subset [g, A] \ ,$$

est vraie, il suffit de vérifier que chaque élément du groupe $[g, A]$ se met sous la forme $[g, a]$ pour un certain $a \in A$.

La clé du raisonnement est encore une fois les identités de commutateur du point 1.1. Notons d'abord que pour tout $a \in A$,

$$[g, a]^{-1} = [g, a^{-1}] \ .$$

En effet,

$$1 = [g, aa^{-1}] = [g, a^{-1}][g, a]^{a^{-1}} = [g, a][g, a^{-1}] \ .$$

La dernière égalité utilise la commutativité de A.

D'après le paragraphe précédent, comme le groupe $[g, A]$ est par définition engendré par les commutateurs $[g, a]$ avec a décrivant A, tout élément de $[g, A]$ est le produit d'un nombre fini de commutateurs de la forme $[g, a]$. Pour répondre à la question, il suffit alors de vérifier que le produit de deux commutateurs $[g, a_1]$ et $[g, a_2]$ est toujours dans $[g, A]$. En effet, une fois cette conclusion atteinte, la conclusion pour un produit arbitraire s'ensuit d'une récurrence sur le nombre de commutateurs dans l'écriture. Or,

$$[g, a_1][g, a_2] = [g, a_1][g, a_2]^{a_1} = [g, a_2a_1] \ .$$

Notons que dans le raisonnement, nous n'avons utilisé que la commutativité de A et le fait que $g \in N_G(A)$. Les raisonnements qui précèdent ce paragraphe (ou une certaine version) montrent en fait que sous ces deux hypothèses, l'application

$$a \longmapsto [g, a]$$

est un endomorphisme du groupe abélien A.

(c) Soient maintenant $y \in G$ et $[g, a] \in [g, A]$. Alors

$$\begin{aligned}
[g, a]^y &= [g^y, a^y] \\
&= [g[g, y], a[a, y]] \\
&= [g, a[a, y]]^{[g,y]}[[g, y], a[a, y]] \\
&= [g, a[a, y]] \ .
\end{aligned}$$

Or $A \lhd G$, ainsi $[g, a[a, y]] \in [g, A]$, et $[g, A] \lhd G$. Notons que la dernière égalité utilise les hypothèses que $A \lhd G$ et que $[A, G'] = 1$.

Problème 2 Comme dans l'énoncé de l'exercice, nous posons

$$B_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \ .$$

2.1 Pour répondre à cette question, il suffit de se rappeler que la conjugaison par une permutation arbitraire préserve la forme d'un k-cycle. En effet, pour tout σ dans un groupe symétrique suffisamment large,

$$(*) \quad \sigma\ (i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\ \sigma(i_2)\ \ldots\ \sigma(i_k)) \ ,$$

et il s'ensuit de cette identité que dans S_4, tout conjugué d'une permutation de la forme $(ab)(cd)$ est l'un des trois éléments non triviaux de B_4. Il n'y a donc aucun calcul compliqué à faire.

Si vous vous sentez moralement obligé de vérifier l'egalité (*), cette vérification ne nécessite pas un grand travail non plus puisque

$$\begin{aligned} \sigma\ (i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)\sigma^{-1}(\ \sigma(i_j)\ ) &= \sigma\ (i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)(\ (i_j)\ ) \\ &= \sigma(i_{j+1}) \text{ si } j < k \\ &= \sigma(i_1) \text{ si } j = k \end{aligned}$$

2.2 Pour répondre à cette question, il existe plusieurs pistes mais la suivante semble efficace. Comme B_4 est distingué dans S_4 d'après 2.1, S_4 agit sur $B_4 \setminus \{1\}$ par conjugaison. Ce dernier ensemble ayant trois éléments, nous concluons en utilisant la théorie générale des actions de groupes qu'il existe un homomorphisme Ψ de S_4 vers S_3.

Puisque le sous-groupe B_4 est abélien, il agit sur lui-même trivialement, en d'autres termes, $B_4 \leq \ker(\Psi)$. Le quotient $S_4/\ker(\Psi)$ est isomorphe au sous-groupe $\Psi(S_4)$ de S_3. Par conséquent, pour finir la preuve, il suffit de montrer que $\Psi(S_4)$ contient un élément d'ordre 3 et un autre d'ordre 2 (pourquoi ?). Pour ce faire, il suffira de trouver un 3-cycle et une transposition dont les images respectives par rapport à Ψ ne sont pas l'élément neutre de S_3 (pourquoi ?). Ceci équivaut à trouver une transposition et un 3-cycle dans dans S_4 qui ne centralisent pas B_4 (pourquoi ?). En fait, toute transposition et tout 3-cycle dans S_4 feront la tache.

2.3 Le cardinal du groupe A_5 est 60. En particulier, chaque 2-Sylow de A_5 est d'ordre 4. Le groupe B_4 est un sous-groupe de A_5 puisqu'il est formé de permutations paires, et il est d'ordre 4. Il s'ensuit de cela que tout 2-Sylow de A_5 est conjugué à B_4. Alors, le résultat général sur les conjugués des k-cycles évoqué dans le point 2.1 implique que pour chaque partie $\{a, b, c, d\}$ de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, A_5 a un 2-Sylow et un seul de la forme

$$S_{abcd} = \{1, (ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc)\} \ .$$

Problème 3 Soit G un groupe d'ordre 2008. Celui-ci est le produit de deux nombres premiers 8 et 251.

3.1 D'après le théorème de Sylow, G a un sous-groupe N d'ordre 251, un 251-Sylow de G. Toujours d'après le même théorème, le nombre de 251-Sylow dans G est de congru à 1 modulo 251 et il divise 8. La seule possibilité qui satisfait ces deux conditions est que N soit le seul 251-Sylow de G. Comme le conjugué d'un élément a même ordre que l'élément lui-même, nous concluons que $N \lhd G$.

3.2 Pour montrer que G est un produit semi-direct de N et d'un 2-Sylow P, il est nécessaire et suffisant de vérifier les trois conditions suivantes :

(i) $G = NP$,

(ii) $N \lhd G$,

(iii) $N \cap P = \{1\}$.

Nous avons vérifié la condition (ii) au point 3.1. Le théorème de Lagrange pour les sous-groupes des groupes finis implique que $N \cap P = \{1\}$. Finalement, le comptage qui montre que

$$|NP| = \frac{|N||P|}{|N \cap P|}$$

implique $|G| = |NP|$, et par conséquent $G = NP$.

3.3 Soit ϕ comme dans l'énoncé. D'après le théorème d'homomorphisme, le groupe quotient $G/\ker(\phi)$ est isomorphe à $\phi(G)$. Comme le groupe N est cyclique d'ordre 251 (un nombre premier), l'exercice 9.(b) de la fiche 1 des travaux dirigés montre que $\mathrm{Aut}(N)$ est isomorphe aux éléments multiplicativement inversibles de $(\mathbb{Z}/251\mathbb{Z}, +)$, qui est un groupe d'ordre 250. Le quotient $G/\ker(\phi)$ étant non trivial et d'ordre une puissance de 2, son cardinal ne saurait être que 2. De manière équivalente, $|\ker(\phi)| = 4$.

3.4 L'énoncé de ce point est en fait erroné. Un contrexemple est donné au premier paragraphe du point 3.5. Quel serait un énoncé correct ? Il y a plusieurs possibilités. En voici deux :

(A) Le sous-groupe $C_G(N)$ contient un sous-groupe d'ordre 4.

(B) Le sous-groupe $Z(G)$ contient un sous-groupe d'ordre 2.

Les vérifications de ces énoncés utilisent le point 3.3. Considérons l'action de P sur N par conjugaison. Ceci équivaut à considérer l'homomorphisme suivant dans la notation du point 3.3 : pour tout $x \in P$,

$$\begin{array}{cccccc} \phi(x) & : & N & \longrightarrow & N \\ & & g & \longmapsto & xgx^{-1} \end{array} .$$

D'après le point 3.3, le noyau de cette action, en d'autres termes $C_P(N)$, est d'ordre 4. Cette conclusion vérifie l'énoncé (A). En ce qui concerne l'énoncé (B), il suffit de constater que

$$|C_P(N) \cap Z(P)| \geq 2$$

et que

$$C_P(N) \cap Z(P) \leq Z(G) .$$

3.5 Nous montrerons que l'hypothèse $G \neq Z(G)$ n'a aucun effet sur la réponse de cet exercice. En effet, dans ce paragraphe et le suivant, nous exhiberons deux groupes *non abéliens* qui ont 1 et 251 2-Sylow respectivement. La somme directe d'un groupe *non abélien* P d'ordre 8 et du groupe cyclique d'ordre 251 a un centre de cardinal 2×251. Pourtant, ce groupe ne contient qu'un seul 2-Sylow.

De l'autre côté, nous pouvons considérer une action de P sur N qui fait intervenir l'inversion des éléments de N. En effet, P étant d'ordre 8, il contient un sous-groupe d'ordre 4, disons N. Alors, dans la notation du point 3.3, il suffit de définir ϕ comme suit :

$$\begin{array}{cccccccccc} \phi & : & P & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(N) \\ & & & & \phi(x) & : & N & \longrightarrow & N \\ & & x & \longmapsto & & & n & \longmapsto & n & \text{si } x \in N \\ & & & & & & n & \longmapsto & n^{-1} & \text{si } x \notin N \end{array}$$

Cette construction nous donne le produit semi-direct $N \rtimes_\phi P$, un groupe non abélien d'ordre 2008 qui contient 251 2-Sylow.