Groupes nilpotents

En cours, vous avez étudié les groupes résolubles. Aux travaux dirigés, l'appellation "groupe nilpotent" a été utilisée pour des groupes réminiscents des groupes abéliens mais elle est restée sansdéfinition. Les exercices suivants forment les premiers pas d'une étude des groupes nilpotents, une classe de groupes d'importance fondamentale, et omniprésente en mathématiques.

D'abord nous fixons la notation. Si G est un groupe et $x_1, x_2 \in G$ alors leur commutateur est défini comme suit

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 \ .$$

La suivante sera la notation, légèrement différente de celle des travaux dirigés, pour la conjugaison de x par y si $x, y \in G$:

$$x^y = y^{-1} x y \ .$$

La notation pour les commutateurs se généralise de la façon suivante :

$$[x_1] = x_1$$

$$\text{pour } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad [x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n] \ .$$

1. Avant d'aborder les groupes nilpotents, il convient de s'entraîner dans l'art du calcul avec les commutateurs.

(a) Vérifiez les égalités suivantes :
(i) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$,
(ii) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z]$,
(iii) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$,
(iv) $[x, y^n] = [x, y] \ldots [x, y]^{y^{n-1}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,
(v) $[x^n, y] = [x, y]^{x^{n-1}} \ldots [x, y]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,
avec $x, y, z \in G$, G étant un groupe quelconque.

(b) Soient G un groupe quelconque, H un sous-groupe abélien et $x \in N_G(H)$. Montrer que les applications

$$h \longmapsto [x, h]$$

et

$$h \longmapsto [h, x]$$

sont des endomorphismes de H.

(c) Montrer que si G est un groupe, H et K deux sous-groupes de G alors K (resp. H) normalise $[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, \ k \in K \rangle$. Montrer ensuite que $[H, K]K$ est le plus petit sous-groupe distingué contenant K, en d'autres termes, que c'est un sous-groupe distingué de G et qu'il est contenu dans tout sous-groupe distingué de G contenant K. (*Pour montrer que $[H, K]K \lhd G$, il suffit de vérifier que $[H, K]K$ est engendré par les conjugués de K dans G.*)

2. D'une façon réminiscente des groupes résolubles, les groupes nilpotents se définissent en utilisant certaines séries. Nous définissons donc la *série centrale ascendante* d'un groupe G d'une façon inductive.

$$Z_0(G) = 1$$

$$\text{pour tout} \quad k \in \mathbb{N}, \quad Z_{k+1}(G)/Z_k(G) = Z(G/Z(G)) \ .$$

Une façon équivalente de définir $Z_{k+1}(G)$ pour $k \in \mathbb{N}$ est

$$\{g \in G \mid [g, h] \in Z_k(G) \text{ pour tout } h \in G\} \ .$$

Montrer que la définition d'une série centrale ascendante est cohérente, en d'autres termes que tout $Z_k(G) \lhd G$. Montrer que la condition suivante plus forte est satisfaite aussi : chaque $Z_k(G)$ est stable sous l'action de tout automorphisme de G (un tel sous-groupe est dit *caractéristique*).

Maintenant, un groupe G est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G = Z_n(G)$. Le plus petit n safisfaisant cette condition est dit la *classe de nilpotence de* G. De cette définition, il est clair que le centre d'un groupe nilpotent non trivial est non trivial. S'il n'est pas clair alors détaillez-en la preuve.

Montrez que toute image homomorphique et tout sous-groupe d'un groupe nilpotent est nilpotent. Montrez qu'un groupe G est nilpotent si et seulement si $G/Z(G)$ est nilpotent. Montrez que la somme directe d'un nombre fini de groupes nilpotents est nilpotente.

Notons avant de passer aux exemples qu'un bon nombre de preuves sur les groupes nilpotents se font par récurrence sur la classe de nilpotence.

3. **Quelques exemples :**

1. Les groupes abéliens sont nilpotents de classe 1.
2. Montrez qu'un p-groupe *fini* est nilpotent.
3. Montrez que si K est un corps commutatif, alors le groupe

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & \dots & 1 \end{pmatrix} \mid a_{i,j} \in K \right\}$$

est nilpotent. Déterminez explicitement $Z_k(U)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déduisez-en la classe de nilpotence de U.

4. **De la nilpotence à la résolubilité :** ... il y a un long chemin, si long qu'un livre à ce sujet s'intitule “Between nilpotent and solvable”.

(a) Montrez que tout groupe nilpotent est résoluble.

(b) Montrez à l'aide d'un exemple que l'énoncé réciproque de celui de (a) est faux. Quel est le plus petit contrexemple ?

(c) Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G. Montrer que G est résoluble si et seulement si G/N et N sont résolubles. Montrer à l'aide d'un exemple que dans l'énoncé précédent on ne peut pas remplacer “résoluble” par “nilpotent”.

Coin culture : Le théorème suivant de Philippe Hall est un critère de nilpotence utile :

Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué. Alors G est nilpotent si et seulement si N et G/N' sont nilpotents.

Rappelons que N' est le sous-groupe dérivé de N. Pouvez-vous voir comment vous pouvez démontrer le théorème de Hall ?

5. **Les groupes nilpotents et les séries centrales *descendantes* :** Maintenant nous introduirons une nouvelle notion de séries centrale. Cette fois-ci, nous descendrons du haut vers le bas.

$$\gamma_0(G) = G;$$

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad \gamma_{k+1}(G) = [G, \gamma_k(G)] .$$

(i) Montrez que si G est un groupe nilpotent de classe n alors $\gamma_i(G) \leq Z_{n-i}(G)$.

(ii) Montrez qu'un groupe G est nilpotent de classe n si et seulement si $\gamma_n(G) = 1$, et que pour tout $k < n$, $\gamma_k(G) \neq 1$.

(iii) Déterminez $\gamma_k(U)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ dans le groupe U de l'exercice 3.3.

6. **Propriétés structurelles des groupes nilpotents :** Montrez les énoncés suivants à propos d'un groupe G nilpotent :

1. Si H est un sous-groupe propre, alors $N_G(H) > H$ (inclusion stricte).
2. Tout sous-groupe maximal de G est distingué dans G.
3. Pour tout nombre premier p, si G a un p-sous-groupe P qui est maximal par rapport à cette propriété, alors P est le seul p-sous-groupe maximal de G. Notons qu'il est possible de montrer l'existence d'un tel sous-groupe maximal mais ceci fait intervenir le *lemme de Zorn* de la théorie des ensembles.
4. Si $N \lhd G$ et $N \neq \{1\}$, alors $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.

7. **Caractérisations d'un groupe nilpotent fini :** Soit G un groupe fini. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est un groupe nilpotent.
2. Si H est un sous-groupe propre, alors $N_G(H) > H$ (inclusion stricte).
3. Tout sous-groupe maximal de G est distingué dans G.
4. G est la somme directe de ses p-sous-groupes de Sylow.

Quand le groupe G est infini, ces conditions ne sont que nécessaires. Les contrexemples ne sont pas toujours faciles à trouver. Les étudiants intéressés peuvent consulter les ouvrages sur les groupes infinis, par exemple "A Course in the theory of groups" de Derek Robinson.

8. Soit G un groupe. Montrer que si H et K sont deux sous-groupes nilpotents de classes c et d respectivement et qu'ils se normalisent, alors le sous-groupe HK est nilpotent de classe au plus $c + d$.