Correction du Devoir 1

Exercice I

1. C'est un grand classique qu'il ne paraît pas utile de détailler ici ; remarquons simplement que l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ s'obtient facilement en utilisant le théorème de Cantor-Bernstein (pour construire une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$ on peut remarquer qu'un rationnel s'écrit avec les 12 symboles $-, /, 0, 1, \ldots, 9$ et utiliser le développement en base 12 d'un entier...)
2. Soit X l'ensemble des réels qui ne font intervenir que des 0 et des 1 dans leurs parties décimales ; on considère l'application $F\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to X$ définie par

$$F(A) = \sum_{i \in A} 10^{-(i+1)}$$

Cette application est bien à valeurs dans X, et est injective : si $F(A) = F(B)$ alors en regardant la i-ième décimale de $F(A)$ on voit que $i \in A \Leftrightarrow i \in B$.
3. Notons Φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ qui à $r \in \mathbb{R}$ associe $\{q \in \mathbb{Q}\colon q \geq r\}$.
Soient r_1 et r_2 deux réels tels que $r_1 < r_2$; par densité de $\mathbb{Q}$ il existe un rationnel q_0 tel que $r_1 < q_0 < r_2$, d'où on tire $q_0 \in \Phi(r_1) \setminus \Phi(r_2)$; par conséquent $\Phi(r_1) \neq \Phi(r_2)$ et ceci montre que ϕ est injective.
On a donc une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ et par conséquent (d'après I.1) une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Comme d'après la question 2. il y a aussi une injection de $\mathcal{P}\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$, le théorème de Cantor-Bernstein permet de conclure qu'il existe une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, autrement dit que le cardinal de $\mathbb{R}$ est égal à $2^{\aleph_0}$.

Exercice II

1. On fixe un ensemble X, et on considère l'ensemble (non vide) $\mathcal{A}$ formé par les paires $(A, <)$ telles que $A \subset X$ et $<$ est un bon ordre strict sur A. Ensuite on munit $\mathcal{A}$ de la relation R définie par

$$\big((A, <)\, R\, (A', <')\big) \Leftrightarrow \big(A \subset A' \text{ et } (A, <) \text{ est un segment initial de } (A', <')\big).$$

On vérifie sans peine que R est une relation d'ordre sur $\mathcal{A}$; reste à vérifier que l'ordre en question est inductif (autrement dit tout sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{A}$ admet un majorant). Pour cela, prenons une famille $(A_i, <_i)$ totalement ordonnée par R ; on veut montrer qu'elle admet un majorant pour la relation R. On commence par poser $A = \cup_{i \in I} A_i$; A contient tous les A_i, et il nous reste à définir un bon ordre sur A dont les sgments initiaux soient les $(A_i, <_i)$; pour $x, y \in A$ on pose

$$\big(x < y\big) \Leftrightarrow \big(\exists i \; x \in A_i \text{ et } y \in A_i \text{ et } x <_i y\big) \; .$$

Il nous reste à vérifier que $<$ est un bon ordre sur A ; pour cela, commençons par remarquer que si $x < y$ alors pour tout i tel que $x, y \in A_i$ on a $x <_i y$. En effet, on sait qu'il existe i_o tel que $x, y \in A_{i_0}$ et $x <_{i_0} y$. Soit alors un autre i tel que $x, y \in A_i$. Comme la famille $(A_i, <_i)$ est totalement ordonnée par R, deux cas sont possibles :

(a) $A_i \subset A_{i_0}$ et $<_{i_0}$ prolonge $<_i$; alors, on voit que $x <_i y$ puisque $x, y \in A_i$ et $<_{i_0}$ prolonge $<_i$.
(b) $A_{i_0} \subset A_i$ et $<_i$ étend $<_{i_0}$; alors on a $x <_i y$ puisque $<_i$ étend $<_{i_0}$.

Cette remarque faite, montrons que la relation $<$ est un bon ordre total strict sur A dont chaque $(A_i, <_i)$ est un segment initial :

(AR) si $x < x$ alors il existe i tel que $x \in A_i$, et notre remarque ci-dessus (appliquée avec $y = x$) montre que $x <_i x$ ce qui est impossible.

(AS) Supposons $x < y$. Alors pour tout i tel que $x, y \in A_i$ on a $x <_i y$ donc (puisque $<_i$ est un ordre strict) on n'a pas $y <_i x$, ce qui prouve que l'on n'a pas non plus $y < x$.

(T) Supposons $x < y$ et $y < z$. Alors on a i tel que $x, y \in A_i$ et j tel que $y, z \in A_j$; la famille $(A_i)_{i \in I}$ étant totalement ordonnée par R, on a $A_i \subset A_j$ ou $A_j \subset A_i$; on peut donc supposer par exemple $A8i \subset A_j$. Mais alors on a$x, y, z \in A_j$ et $x <_j y <_j z$, ce dont on déduit $x <_j z$ et par conséquent $x < z$.

(Tot) Soient $x \neq y \in A$. Comme ci-dessus, il existe i tel que $x, y \in A_i$. Comme $<_i$ est total on sait que $x <_i y$ pu $y <_i x$, ce dont on déduit que $x < y$ ou $y < x$.

(BO) C'est là qu'on utilise le fait d'avoir imposé que les A_i soient des segments initiaux les uns des autres. Soit X une sous-partie non vide de A. Soit $x \in X$; il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$. Soit a le minimum de $X \cap A_i$ pour $<_i$ (qui existe puisque $<_i$ est un bon ordre sur A_i), et x un élément de X quelconque. Il existe j tel que $x \in A_j$; deux cas sont possibles :

(a) $(A_i, <_i)$ est un segment initial de $(A_j, <_j)$; alors on voit que $a = \min(A_i \cap X, <_i) = \min(A_j \cap X, <_j)$ et donc $a <_j x$, d'où $a < x$.

(b) $(A_j, <_j)$ est un segment initial de $(A_i, <_i)$; alors $A_j \subset A_i$, donc $x \in A_i$, et par définition de a cela impose $a <_i x$ et donc $a < x$.

(SI) Pour vérifier que $(A_i, <_i)$ est un segment initial de $(A, <)$, prenons $a \in A_i$ et $x \in A \setminus A_i$; alors $x \in A_j \setminus A_i$ pour un certain j, et comme $(A_i, <_i)$ est un segment initial de $(A_j, <_j)$ on en déduit $a <_j x$ et donc $a < x$.

Le lemme de Zorn implique alors que $\mathcal{A}$ admet un plus grand élément $(A, <)$. Montrons par l'absurde que l'on doit avoir $A = X$: sinon, il existe $x \in X \setminus A$; alors on peut définir $A' = A \cup \{x\}$, et définir un nouvel ordre sur A' étendant l'ordre sur A en posant $a <' x$ pour tout $a \in A$. Alors $(A', <')$ est bien ordonné, et majore strictement $(A, <)$ pour la relation R (chayqe $(A, <)$ est bien un segment initial de $(A', <')$), contredisant la maximalité de $(A, <)$.
Par conséquent, un élément $(A, <)$ maximal pour $(\mathcal{A}, R)$ doit vérifier $A = X$; alors $<$ témoigne du fait que A peut être muni d'un bon ordre.
On vient de prouver que le lemme de Zorn implique le principe du bon ordre.

2. Il y a plusieurs façons de répondre à cette question ; présentons-en deux :

Par récurrence transfinie : Fixons un ensemble E infini non dénombrable, $x \notin E$, et une fonction de choix φ sur E. On définit une opération G de la manière suivante : si α est un ordinal et X est le graphe d'une fonction $f\colon \alpha \to E$, alors on pose

$$G(X) = \begin{cases} \varphi(E \setminus \{f(\beta)\colon \beta < \alpha\}) & \text{si cet ensemble est non vide} \\ x & \text{sinon} \end{cases} .$$

(Remarque : ça peut être un bon exercice de vérifier que la définition ci-dessus est bien légitime)
Pour tout autre X on pose également $G(x) = x$.
Alors considérons la restriction à ω_1 de l'opération F sur les ordinaux obtenue en appliquant le théorème de récurrence transfinie à G, et prouvons par récurrence qu'il n'existe aucun $\alpha < \omega_1$ tel que $F(\alpha) = x$.
Comme E est non vide, on doit avoir $F(0) = \varphi(E) \neq x$; supposons maintenant que $\alpha < \omega_1$ est tel que $F(\beta) \neq x$ pour tout $\beta < \alpha$. Alors F définit une fonction de α dans E, et comme α est dénombrable et E ne l'est pas on ne peut avoir $\{F(\beta)\colon \beta < \alpha\} = E$; par définition de F on a

$$F(\alpha) = G(F_{|\alpha}) = \varphi(E \setminus \{F(\beta)\colon \beta < \alpha\}) \neq x .$$

On vient détablir par récurrence transfinie que F définit une fonction de ω_1 dans E ; de plus cette fonction est injective par construction, puisque si $\alpha < \beta < \omega_1$ on a

$$F(\beta) = \varphi(E \setminus \{F(\beta'\colon \beta' < \beta\}) \subset E \setminus \{F(\alpha)\} .$$

Autrement dit, on vient de construire une partie de E de cardinal $\aleph_1$: l'ensemble $F(\omega_1)$.

En utilisant les cardinaux : En utilisant l'axiome du choix, on sait qu'il existe un unique cardinal κ tel que E est en bijection avec κ. E étant infini et non dénombrable, on a $\kappa > \aleph_0$ (puisque $\aleph_0$ est le plus petit cardinal infini, $\kappa \neq \aleph_0$ par hypothèse et $<$ est un ordre sur les cardinaux). Ceci est équivalent à $\aleph_1 \leq E$ par définition de $\aleph_1$, par conséquent si E est infini non dénombrable alors il existe une injection de $\aleph_1$ dans E, autrement dit E contient une partie de cardinal $\aleph_1$.

3. On suppose que pour toute paire d'ensembles A et B on a $|A| \leq |B|$ ou $|B| \leq |A|$.
Ici on doit penser au cardinal de Hartogs : soit A un ensemble quelconque ; on sait par définition de $h(A)$ qu'on ne peut pas avoir $|h(A)| \leq |A|$ (sans symboles : il ne peut pas exister une injection du cardinal de Hartogs de A dans A). Alors, sous l'hypothèse de l'exercice, on doit avoir $|A| \leq |h(A)|$, autrement dit il existe une injection $f\colon A \to h(A)$. Mais toute sous-partie d'un ensemble bien ordonnable est elle même bien ordonnable (par l'ordre induit, exercice fait en TD), par conséquent $f(A)$ est bien ordonnable ; comme A est en bijection avec $f(A)$, on en déduit que A peut-être muni d'un bon ordre.
On vient donc de démontrer le thórème de Zermelo, dont on sait qu'il est équivalent à l'axiome du choix, à partir de l'énoncé donné dans l'exercice.

Exercice III

1. Ici il faut choisir quelle définition de $\alpha+\beta$ on utilise ; si on utilise celle du cours, il faut montrer par récurrence transfinie qu'une somme de deux ordinaux dénombrables est dénombrable. Si l'on utilise la définition du TD, alors on sait que, pour tous ordinaux α, β, $\alpha+\beta$ est en bijection avec l'union disjointe de α et β. L'union de deux ensembles dénombrables étant dénombrable, on voit que $\alpha+\beta$ est dénombrable dès que α et β le sont. De même $\alpha.\beta$ est en bijection avec le produit de α et β, et le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable, par conséquent α et β est aussi dénombrable dès que α et β le sont.
Pour α^β, on n'a pas d'autre choix que de raisonner par récurrence transfinie (nous n'avons pas vu de définition alternative de l'exponentiation ordinale). Fixons donc un ordinal dénombrable α, et montrons que α^β est dénombrable pour tout ordinal dénombrable β. Si $\beta = 0$ il n'y a rien à faire ; supposons la propriété établie pour tout $\beta' < \beta$. Il y a deux cas à considérer :

1. β est successeur ; alors $\beta = \beta' + 1$, donc $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'+1} = \alpha^{\beta'}.\alpha$. Or par hypothèse de récurrence $\alpha^{\beta'}$ est dénombrable, et on a vu plus haut que le produit de deux ordinaux dénombrables est dénombrable. Donc α^β est lui aussi dénombrable.
2. β est limite. Alors on a $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^{\beta'} : \beta' < \beta\}$, donc α^β est le sup d'un ensemble dénombrable ($\beta < \omega_1$) d'ordinaux dénombrables (par hypothèse de récurrence), ce qui prouve que α^β est dénombrable.

   Remarque : Il faut l'axiome du choix (dénombrable) pour montrer en général qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, et cela entraîne qu'un sup d'un ensemble dénombrable d'ordinaux dénombrables est encore un ordinal dénombrable (le sup d'un ensemble d'ordinaux est l' union des ordinaux dans ces ensemble). On peut en fait se passer de l'axiome du choix :

2.1. Vérifions par récurrence que si $\alpha = \omega + \alpha$ alors $\alpha \geq \omega.n$ pour tout n : pour $n = 0$ il n'y a rien à faire, et si $\alpha \geq \omega.n$ alors $\alpha = \omega+\alpha \geq \omega+\omega.n = \omega.(n+1)$ Par conséquent on voit qu'un ordinal α tel que $\alpha = \omega+\alpha$ doit être plus grand que $\omega^2 = \sup\{\omega.n\colon n < \omega\}$. On observe que l'on a $\omega + \omega^2 = \sup\{\omega\} = \sup\{\omega.(n+1)\colon n < \omega\} = \omega^2$.

En fait, on peut généraliser cette méthode : si F est une opération sur les ordinaux telle que $F(\alpha)$ est un ordinal pour tout α, F est croissante, $F(\alpha) \geq \alpha$ pour tout α et F est continue aux ordinaux limites (i.e si λ est limite alors $F(\lambda) = \sup\{F(\alpha)\colon \alpha < \lambda)$, alors F a des points fixes et le plus petit point fixe supérieur ou égal à un γ donné est est la borne supérieure des $F^n(\gamma)$. En effet, si $\alpha \geq \gamma$ est un point fixe alors de $\alpha \geq \gamma$ et F croissante on déduit $\alpha = F(\alpha) \geq F(\gamma)$, puis par récurrence on obtient $\alpha \geq F^n(\gamma)$ pour tout n. Réciproquement, si $\alpha = \sup\{F^n(\gamma)\colon n < \omega$ alors deux cas sont possibles :

1. α est successeur, auquel cas on voit qu'il existe n tel que $F^{n+1}(\gamma) = F^n(\gamma) = \alpha$, donc α est bien un point fixe pour F.
2. α est limite ; alors la suite $(F^n(\gamma)$ est strictement croissante et on a $F(\alpha) = \sup\{F(\beta)\colon \beta < \alpha\} = \sup\{F(F^n(\gamma)\colon n < \omega\} = \alpha$ par continuité de F aux ordinaux limites (détaillez cette étape ; l'égalité des deux sup provient de la croissance de F et de la définition de α).

2.2. Le schéma général expliqué ci-dessus montre que cette fois-ci $\alpha = \sup\{\omega^n\colon n < \omega\} = \omega^\omega$.
2.3. Et cette fois-ci on a $\alpha = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\} = \epsilon$ (remarque : c'est un bon exercice de montrer par récurrence trasnfinie qu'on a bien $\omega^\alpha \geq \alpha$ pour tout ordinal α).

3. La question III.A montre que les α obtenus en III.2.1 et III.2.2 sont dénombrables ; pour montrer que ϵ est dénombrable, il suffit de remarquer qu'il est le sup d'un ensemble dénombrable d'ordinaux dénombrables, est est donc lui-même dénombrable.