Correction du Devoir 2

Exercice I

(a) Comme κ est singulier, on sait qu'il existe un cardinal $\eta < \kappa$ et une fonction $f\colon \eta \to \kappa$ dont l'image n'est pas bornée. Remarquons que comme κ est singulier, c'est un cardinal limite ; par conséquent on sait que si $\alpha \in \kappa$ alors il existe un cardinal λ tel que $\alpha < \lambda < \kappa$. Pour tout $\alpha < \eta$ on peut donc définir

$$\tilde{f}(\alpha) = \min\{\lambda < \kappa \colon f(\alpha) < \lambda\} .$$

Alors $\tilde{f}(\alpha) = \kappa_\alpha$ est un cardinal pour tout $\alpha < \eta$, et comme $\tilde{f}(\alpha) > \alpha$ on voit que $\kappa = \sup_{\alpha<\eta} \kappa_\alpha$. Si $\eta \geq \lambda_0$ on a fini ; sinon, il suffit de "répéter" suffisamment de fois les mêmes valeurs. Par exemple, on peut remarquer que comme $\eta < \lambda_0$ il existe une surjection $f\colon \lambda_0 \to \eta$; on peut alors poser, pour $\alpha < \lambda_0$, $\tilde{\kappa}_\alpha = \kappa_{f(\alpha)}$. Alors la suite $(\tilde{\kappa}_\alpha)_{\alpha<\lambda_0}$ a κ comme borne supérieure.

(b) C'est une conséquence directe de la définition des κ_α : si deux fonctions $f, g\colon \kappa \to 2$ sont différentes alors il existe $\beta < \kappa$ tel que $f(\beta) \neq g(\beta)$, et comme $\beta \in \kappa_\alpha$ pour un certain $\alpha < \rho$ on voit que f^α et g^α ne sont pas égales.

(c) Puisque $\lambda_0 < \kappa$ on a $2^{\lambda_0} \leq 2^\kappa$, autrement dit $\gamma \leq 2^\kappa$. Réciproquement, le résultat de I(b) montre que

$$2^\kappa \leq \prod_{\alpha<\rho} 2^{\kappa_\alpha} \leq \prod_{\alpha<\rho} \gamma = \gamma^\rho = (2^\rho)^\rho = 2^\rho = \gamma$$

Exercice II

(a) Pour toute $f\colon \aleph_1 \to \aleph_\omega$ et tout $n \in \omega$ on peut définir $f^n\colon \aleph_1 \to \aleph_n$ par la formule

$$f^n(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } f(\alpha) < \aleph_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors on vérifie que l'application $f \mapsto (f^n)$ est une injection (fait en TD), ce qui prouve que

$$\aleph_\omega^{\aleph_1} \leq \prod_{n<\omega} \aleph_n^{\aleph_1}.$$

(b) Il est clair que $\aleph_\omega^{\aleph_1} \geq \aleph_\omega^{\aleph_0}.2^{\aleph_1}$; pour vérifier l'autre inégalité, on peut utiliser la formule de Hausdorff, qui implique que $\aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_n.2^{\aleph_1}$. Alors l'inégalité obtenue en (a) donne

$$\aleph_\omega^{\aleph_1} \leq \prod_{n<\omega} \aleph_n.2^{\aleph_1} = (\prod_{n<\omega} \aleph_n).2^{\aleph_1 \cdot \aleph_0} \leq (\prod_{n<\omega} \aleph_\omega).2^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}.2^{\aleph_1} .$$

Exercice III

1. Soit κ un cardinal non dénombrable régulier, et $\beta < \kappa$. On veut trouver un ordinal limite α tel que $\beta < \alpha < \kappa$. Si β est fini on peut prendre $\alpha = \omega$; sinon par exemple $\beta.\omega$ convient : dès qu'on prend une suite strictement croissante d'ordinaux (α_n), le sup de cette suite est un ordinal limite, par conséquent $\beta.\omega = \sup\{\beta.n \colon n < \omega\}$ est un ordinal limite. De plus $\beta.\omega$ est de cardinalité égale à $\max(|\beta|, \aleph_0) < \kappa$, donc $\beta.\omega < \kappa$; enfin on sait que $\beta.\omega > \beta$ (comme l'addition à droite est strictement monotone, on a déjà $\beta + \beta > \beta$).

On vient de voir que $\{\alpha < \kappa \colon \alpha \text{ est un ordinal limite}\}$ est non borné. Pour vérifier que cet ensemble est également fermé, prenons un ordinal limite λ et une suite strictement croissante d'ordinaux limite $(\alpha_\xi)_{\xi<\lambda}$ tels que $\alpha_\xi < \kappa$ pour tout $\xi < \lambda$. Alors $\lambda < \kappa$, et $\alpha = \sup\{\alpha_\xi \colon \xi < \lambda\}$ est un ordinal limite strictement inférieur à

κ (car κ est régulier).
2. Evident en revenant à la définition d'un club.
3. Fait en cours (lemme 4.1.2 p28 des notes de cours)
4. Comme κ est régulier, tout ensemble $S \subset \kappa$ tel que $\sup(S) = \kappa$ doit être de cardinal κ. Par conséquent, si S est un ensemble de cardinal strictement inférieur à κ, alors $\sup(S) = \alpha < \kappa$. Mais alors $C = \{\beta < \kappa \colon \beta \geq \alpha+1\}$ est un club, et $S \cap C = \emptyset$. On vient de montrer qu'un ensemble de cardinal $< \kappa$ ne peut pas être stationnaire, autrement dit que tout ensemble stationnaire est de cardinal κ.
5. Soit S stationnaire et C, C' deux clubs. Alors $C \cap C'$ est un club (toujours le lemme 4.1.2) et par conséquent $S \cap (C \cap C') = (S \cap C) \cap C'$ est non vide ; on vient de montrer que $S \cap C$ est stationnaire.

Exercice IV
(1) Par définition de $\mathrm{cof}(\gamma)$, il existe une fonction $f \colon \mathrm{cof}(\gamma) \to \gamma$ (strictement croissante si on veut) d'image non bornée dans γ. Mais alors l'application $\tilde{f} \colon \mathrm{cof}(\gamma) \to \alpha$ définie par $\tilde{f}(\alpha) = \beta_{f(\alpha)}$ est une fonction définie sur $\mathrm{cof}(\gamma)$, à valeurs dans α, et d'image non bornée dans α : on vient de montrer que $\mathrm{cof}(\gamma) \geq \mathrm{cof}(\alpha)$.
Réciproquement, soit $g \colon \mathrm{cof}(\alpha) \to \alpha$ strictement croissante et d'image non bornée ; pour tout $\beta \in \mathrm{cof}(\alpha)$ on définit

$$\tilde{g}(\beta) = \sup\{i < \gamma \colon g(\beta) > \beta_i\}$$

Cette fonction est bien définie, et à valeurs dans γ puisque pour tout β on a $g(\beta) < \alpha$ donc il existe $i_0 < \gamma$ tel que $\beta_i > g(\beta)$ pour tout $i > i_0$ (ici on utilise le fait que α est limite), ce qui montre que $\tilde{g}(\beta) \leq i_0 < \gamma$. De plus, si $i \in \gamma$, alors il existe $\beta < \mathrm{cof}(\alpha)$ tel que $g(\beta) > \beta_i$, d'où $\tilde{g}(\beta) \geq i$, ce qui montre que l'image de $\tilde{g}$ est non bornée et donc que $\mathrm{cof}(\alpha) \geq \mathrm{cof}(\gamma)$.
Note : Pour la question (2), on rajoute l'hypothèse "κ est un cardinal régulier infini et non dénombrable", qui aurait dû être présente dans l'énoncé.
(2) L'énoncé n'est pas tout à fait correct : si $1 < \lambda < \omega$ alors $\{\alpha < \kappa \colon \mathrm{cof}(\kappa) = \lambda\}$ est vide, et n'est donc pas stationnaire ; en effet, nous avons vu en TD qu'un ordinal avait pour cofinalité ou bien 1 (si l'ordinal est successeur) ou bien un cardinal supérieur à $\aleph_0$ (si l'ordinal est limite). Le cas $\lambda = 1$ est un peu différent : l'ensemble E^1_κ est l'ensemble des ordinaux successeurs strictement inférieurs à κ, qui est non vide ; par contre ce n'est pas un club puisque son intersection avec $\{\alpha < \kappa \colon \alpha \text{ est un ordinal limite}\}$ est vide, alors qu'on a vu en III.1 que $\{\alpha < \kappa \colon \alpha \text{ est un ordinal limite}\}$ est un club. L'énoncé est donc faux pour tout λ fini.
Il nous reste à traiter le cas où λ est infini. Soit C un club. Comme C est non borné, $\lambda < \kappa$ et κ est régulier, on peut par récurrence transfinie construire une suite strictement croissante $(\alpha_\xi)_{\xi<\lambda}$ d'éléments de C (vérifiez-le). Si on pose $\alpha = \sup\{\alpha_\xi \colon \xi < \lambda\}$, alors $\alpha \in C$ puisque C est un club, et on a $\mathrm{cof}(\alpha) = \mathrm{cof}(\lambda) = \lambda$ d'après IV.1. Par conséquent E^λ_κ est stationnaire.