Correction du Devoir 3

1. Pour $\alpha = 0$ on a $|D_0(X)| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 = |0+\omega|$ donc la propriété est vraie au rang 0. Supposons maintenant que $\beta \in \kappa$ et que la propriété "$|D_\alpha(X)| = |\alpha+\omega|$" soit vraie pour tout $\alpha < \beta$. Alors on doit considérer deux cas :

(a) β est successeur. Soit alors α tel que $\beta = \alpha + 1$. On a $D_\beta(X) = D_\alpha(X) \cup I$, où $|I| = \omega$ (I est un intervalle de rationnels). On en déduit $|D_\beta(X)| \leq |D_\alpha(X)| + \aleph_0 = |\alpha+\omega| + \aleph_0 = |\alpha+\omega|$ (si α est fini alors les deux cardinaux sont égaux à $\aleph_0$, sinon ils sont tous deux égaux à $|\alpha|$; rappelons que la somme de deux ordinaux a pour cardinal la somme de leurs cardinaux). De plus on a par définition $|D_\beta(X)| \geq |D_\alpha(X)| = |\alpha+\omega| = |\alpha+1+\omega| = |\beta+\omega|$ (les ordinaux $\alpha+\omega$ et $\alpha+1+\omega$ sont égaux puisque $1+\omega = \omega$ et la somme ordinale est associative). Ces deux inégalités nous donnent $|D_\beta(X)| = |\beta+\omega|$.

(b) β est limite. Alors on a $|D_\alpha(X)| = |\alpha+\omega| \leq |\beta+\omega|$ pour tout $\alpha < \beta$, ce dont on tire

$$|D_\beta(X)| = \Big|\bigcup_{\alpha<\beta} D_\alpha(X)\Big| \leq |\beta|.|\beta+\omega| = |\beta+\omega|$$

Pour l'inégalité réciproque, on peut par exemple utiliser le fait que $|D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X)| = \aleph_0$ pour tout $\alpha < \beta$, et que les ensembles $D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X)$ sont deux à deux disjoints ; on a alors

$$|D_\beta(X)| \geq \Big|\bigsqcup_{\alpha<\beta} D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X)\Big| = |\beta|.|\omega| = |\beta+\omega| \ .$$

2. On pose $D(X) = D_\kappa(X) = \bigcup_{\alpha<\kappa} D_\alpha(X)$; d'après la question 1 c'est une réunion de κ ensembles de cardinal inférieur à κ, par conséquent on a $|D(X)| \leq \kappa.\kappa = \kappa$. Pour l'inégalité réciproque on peut utiliser la même méthode que ci-dessus :

$$|D(X)| \geq \Big|\bigsqcup_{\alpha<\kappa} D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X)\Big| = \kappa.\aleph_0 = \kappa \ .$$

Pour montrer que $\prec$ est un ordre linéaire dense sans extrémités, on procède par récurrence transfinie, i.e on montre que pour tout $\alpha \leq \kappa$ $(D_\alpha(X), \prec)$ a cette propriété. Pour $\alpha = 0$ c'est vrai ; comme d'habitude, on suppose la propriété vraie pour tout $\alpha < \beta$, et on doit examiner deux cas :

(a) $\beta = \alpha + 1$; alors on vérifie directement sur la définition que $\prec$ est linéaire. Il n'y a pas de plus petit élément puisque pour tout $i \notin D_0(X)$ et tout $j \in D_0(X)$ on a $j \prec i$, donc le plus petit élément pour $\prec$ devrait appartenir à $D_0(X)$, qui n'a pas de plus petit élément. Et il n'y a pas de plus grand élément puisque ce devrait être un plus grand élément de $D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X)$, qui est isomorphe à un segment non borné à droite de rationnels. Pour la densité, soit $x \prec y \in D_\beta(X)$; à cause de l'hypothèse de récurrence on peut supposer $y \in D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X)$, et deux cas se présentent :

  (i) $x \in D_\alpha(X)$; alors comme $D_\alpha(X)$ est sans extrémités il existe $z \in D_\alpha(X)$ tel que $x \prec z$, et la définition de l'ordre garantit que $x \prec z \prec y$.

  (ii) $x \in D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X)$; alors, comme par définition $(D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X), \prec)$ est isomorphe à un ordre dense (un segment de $\mathbb{Q}$), il existe $z \in D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X)$ tel que $x \prec z \prec y$.

On a établi toutes les propriétés désirées dans le cas où β est successeur.

(b) β est limite. Alors le fait que $\prec$ est linéaire découle encore directement de la définition ; il n'y a pas de plus petit élément pour la même raison que ci-dessus, et si on prend $x \in D_\beta(X)$ alors il existe $\alpha < \beta$ tel que $x \in D_\alpha(X)$, donc n'importe quel $y \in D_{\alpha+1}(X) \setminus D_\alpha(X)$ témoigne du fait que x n'est pas un plus grand élément de $(D_\beta(X), \prec)$. Reste à vérifier que l'ordre est dense ; si $x \prec y \in D_\beta(X)$ alors il existe $\alpha < \beta$ tel que $x, y \in D_\alpha(X)$; par hypothèse de récurrence, il existe $z \in D_\alpha(X)$ tel que $x \prec z \prec y$, ce qui suffit à prouver que $\prec$ est un ordre dense sur $D_\beta(X)$.

On voit donc que $(D(X), \prec)$ est bien un ensemble linéairement densément ordonné de cardinal κ.

3. Soit $C = \{\alpha \in D(X) \colon f(D_\alpha(X)) = D_\alpha(Y)\}$. On veut prouver que C est un club ; deux points sont à établir :

(a) C est fermé : pour le montrer, prenons un ordinal limite $\lambda < \kappa$ et une suite strictement croissante $(\alpha_\xi)_{\xi<\lambda}$ d'éléments de C. Posons $\alpha = \sup\{\alpha_\xi \colon \xi < \lambda\}$. Alors bien sûr $\alpha < \kappa$ puisque κ est régulier ; de plus on vérifie que $D_\alpha(X) = \bigcup_{\xi<\lambda} D_{\alpha_\xi}(X)$ et $D_\alpha(Y) = \bigcup_{\xi<\lambda} D_{\alpha_\xi}(Y)$, ce dont on tire

$$f(D_\alpha(X)) = f\Big(\bigcup_{\xi<\lambda} D_{\alpha_\xi}(X)\Big) = \bigcup_{\xi<\lambda} f(D_{\alpha_\xi}(X)) = \bigcup_{\xi<\lambda} D_{\alpha_\xi}(Y) = D_\alpha(Y) \ .$$

(b) C est non borné : fixons $\beta < \kappa$. On suit l'indication de l'énoncé, en posant par exemple $\alpha_0 = \beta + 1$. Alors prenons $x \in D_{\alpha_0+1}(X)$: x majore strictement tous les éléments de $D_{\alpha_0}(X)$, donc $f(x)$ majore strictement tous les éléments de $f(D_{\alpha_0}(X))$. Il existe $\alpha_1 > \alpha_0$ tel que $f(x) \in D_{\alpha_1}(Y)$; d'après la définition de l'ordre sur $D(Y)$, un élément de $D_{\alpha_1}(Y)$ ne peut majorer toute une partie $A \subset D(Y)$ que si $A \subsetneq D_{\alpha_1}(Y)$. On vient donc de montrer qu'il existe $\alpha_1 < \kappa$ tel que $\alpha_1 > \alpha_0$ et $f(D_{\alpha_0}(X)) \subsetneq D_{\alpha_1}(Y)$. Pour obtenir α_2, on utilise le fait que f^{-1} est un isomorphisme de $D(Y)$ sur $D(X)$; par récurrence, on construit ainsi une suite strictement croissante $(\alpha_i)_{i<\omega}$ telle que :

   (a) si n est pair alors $f(D_{\alpha_n}(X)) \subsetneq D_{\alpha_{n+1}}(Y)$;

   (b) Si n est impair alors $f^{-1}(D_{\alpha_n}(Y)) \subsetneq D_{\alpha_{n+1}}(X)$, autrement dit $D_{\alpha_n}(Y) \subsetneq f(D_{\alpha_{n+1}}(X))$

Soit alors $\alpha = \sup\{\alpha_n \colon n < \omega\}$; $\alpha < \kappa$ puisque κ est régulier et non dénombrable, et on a par construction $D_\alpha(X) = \bigcup_{n<\omega} D_{\alpha_n}(X)$, $D_\alpha(Y) = \bigcup_{n<\omega} D_{\alpha_n}(Y)$, donc les inclusions (a) et (b) ci-dessus donnent $f(D_\alpha(X)) = D_\alpha(Y)$.

On vient donc de trouver $\alpha \in C$ tel que $\alpha > \beta$, ce qui achève la preuve du fait que C est un club.

4. Soit $\beta \in X \setminus Y$, et $\alpha \in S_\beta \cap C$. Alors on a $f(D_\alpha(X)) = D_\alpha(Y)$. Comme $\alpha \in S_\beta$ et les S_β sont deux à deux disjoints, on sait que $\alpha \notin \sqcup_{\beta' \in Y} S_{\beta'}$. Mais alors la construction de $D(X)$, $D(Y)$ assure que $D_\alpha(X)$ admet une borne supérieure dans $D(X)$, alors que $D_\alpha(Y)$ n'admet pas de borne supérieure dans $D(Y)$. Par conséquent un isomorphisme de $D(X)$ sur $D(Y)$ ne peut pas envoyer $D_\alpha(X)$ sur $D_\alpha(Y)$, et ceci contredit l'hypothèse selon laquelle f est un isomorphisme de $D(X)$ sur $D(Y)$. Par conséquent $D(X)$ est isomorphe à $D(Y)$ si, et seulement si, $X = Y$; ceci prouve qu'il y a au moins 2^κ ordres linéaires denses et sans extrémités non isomorphes sur κ. Comme un ordre sur κ est une relation binaire, c'est en particulier une sous-partie de $\kappa \times \kappa$, donc il n'y a pas plus de $2^{\kappa\times\kappa} = 2^\kappa$ ordres distincts sur κ. En réunissant ces deux inégalités, on voit qu'on a établi qu'il existe exactement 2^κ ordres linéaires denses sans extrémités et non isomorphes sur un ensemble de cardinal κ, dès lors que κ est un cardinal non dénombrable et régulier.