Correction du Devoir 4

Exercice I.

1. Faisons la liste des énoncés dans le langage $\{R\}$ (où R est une relation binaire) dont les modèles sont les relations d'équivalence ayant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une et une seule classe de cardinal n. Il faut déjà dire que R est une relation d'équivalence :

$\forall x\ xRx$;

$\forall x \forall y\ (xRy \Rightarrow yRx)$;

$\forall x \forall y \forall z\ (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$.

Il nous reste à rajouter pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un énoncé disant qu'il existe une et une seule classe de cardinal n ; pour faciliter la compréhension, commençons par écrire une formule $A_n(x_1, \dots, x_n)$ disant que $\{x_1, \dots x_n\}$ est une R-classe de cardinal n :

$$(\bigwedge_{1 \le i \le j \le n} x_i R x_j) \wedge (\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j) \wedge \big(\forall y((yRx_1) \Rightarrow (\bigvee_{1 \le i \le n} y = x_i))\big)$$

(On a utilisé la notation $x \neq y$ comme abréviation de $\neg(x = y)$)
En français, on a écrit : " les (x_i) sont tous dans la même classe d'équivalence et sont deux à deux distincts et si y est équivalent à x_1 alors y est un des x_i".
Un énoncé possible disant qu'il existe une unique R-classe de cardinal n est alors :

$$\exists x_1 \dots \exists x_n\ \big(A_n(x_1, \dots x_n) \wedge (\forall y_1 \dots \forall y_n (A_n(y_1, \dots, y_n) \Rightarrow (\bigwedge_{1 \le i \le n} \bigvee_{1 \le j \le n} y_i = x_j)\big)$$

2. Donnons un exemple de modèle $\mathcal{N}$ infini de cette théorie ; on peut par exemple partitionner $\mathbb{N}$ en paquets de taille de plus en plus grande. Pour cela, on prend $N = \mathbb{N}$, et on définit la relation R en posant, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$:

$$(iRj) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ i, j \in \left[\frac{n(n+1)}{2}, \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right[$$

Autrement dit, on a regroupé les entiers par paquets de taille croissante : un paquet de taille 1 ($\{0\}$), puis un de taille 2 ($\{1, 2\}$), puis un de taille 3 ($\{3, 4, 5\}$), etc. On a donc bien défini un modèle (dénombrable) de notre théorie.

3. Maintenant, enlevons un élément dans chaque classe d'équivalence (par exemple $\frac{n(n+1)}{2}$) et appelons M l'ensemble obtenu ; la restriction à M de la relation R est encore une relation d'équivalence, et on voit que $\mathcal{M} = (M, R)$ est également un modèle de T (pour tout $n \geq 1$ une R-classe dans M de cardinal n correspond à la R-classe dans N de cardinal $n + 1$). Ces deux modèles sont isomorphes, et par défitition $\mathcal{N}$ est une sous-structure de $\mathcal{M}$, mais ce n'est pas une sous-structure élémentaire. Pour le voir, considérons simplement la formule $\varphi(x)$ suivante :

$$\exists y (y \neq x \wedge yRx)$$

Alors $\varphi(2)$ est vraie dans $\mathcal{N}$ ($1 \neq 2$ et $1R2$) mais fausse dans $\mathcal{M}$ (la R-classe de 2 dans M n'a qu'un seul élément).

4. On a défini plus haut un modèle dénombrable $\mathcal{N}$ de notre théorie qui n'a aucune classe infinie. Pour en créer un avec exactement une classe infinie, on peut par exemple prendre pour univers $N \sqcup \mathbb{N}$, en faisant de la copie de $\mathbb{N}$ une nouvelle R-classe. Pour un modèle dénombrable avec une infinité de classes infinies, prenons pour univers $N \sqcup \mathbb{N}^2$, et rajoutons aux classes de N des nouvelles classes deux à deux disjointes, définies en disant que deux paires d'entiers (n_1, m_1) et (n_2, m_2) sont R-équivalentes si et seulement si $n_1 = n_2$. On obtient bien à chaque fois un modèle de notre théorie puisqu'on n'a pas changé l'ensemble des classes finies.

Exercice II.
Pour dire qu'une structure dans le langage $(+, ., ^{-1}, -, 0, 1)$ est un corps, il faut faire la liste d'axiomes suivants :

$\forall x \forall y \forall z\ x + (y + z) = (x + y) + z$	(l'addition est associative)
$\forall x \forall y \forall z\ x.(y.z) = (x.y).z$	(la multiplication est associative)
$\forall x \forall y \forall z\ x.(y + z) = x.y + x.z$	(l'addition est distributive sur la multiplication)
$\forall x \forall y\ x + y = y + x$	(l'addition est commmutative)
$\forall x \forall y\ x.y = y.x$	(la multiplication est commutative)
$\forall x\ 0 + x = x$	(0 est le neutre pour l'addition)
$\forall x\ 1.x = x$	(1 est le neutre pour la multiplication)
$\forall x x + (-x) = 0$	($-x$ est l'inverse de x pour $+$)
$\forall x\ x \neq 0 \Rightarrow x.x^{-1} = 1.$	(pour x non nul, x^{-1} est l'inverse de x pour .)
$0 \neq 1.$	(un corps a au moins deux éléments !)

Remarque. En fait le quatrième énoncé (commutativité de $+$) est inutile (c'est une conséquence des autres énoncés) mais dans notre cadre il n'est pas utile de chercher une liste minimale d'énoncés dont les modèles soient exactement les corps.
Pour simplifier la notation dans la suite, convenons que, pour tout entier n, on note

$$n.x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ fois}} \qquad \text{et} \qquad x^n = \underbrace{x.\ldots.x}_{n \text{ fois}} .$$

Alors, si $p > 0$, un énoncé disant que le corps est de caractéristique p est simplement :

$$p.1 = 0$$

Remarque. L'énoncé ci-dessus a un sens pour tout p entier, mais n'est consistant avec les énoncés définissant un corps que si p est premier.
Un corps de caractéristique nulle est simplement un corps qui n'est de caractéristique p pour aucun p premier ; pour définir les corps de caractéristique nulle, on ajoute à la liste d'énoncés ci-dessus la liste d'énoncés suivants (pour tout p premier) :

$$p.1 \neq 0$$

Il nous reste à trouver une liste d'énoncés qui nous disent que le corps est algébriquement clos ; pour cela on ajoute, pour tout $n \geq 1$, l'énoncé :

$$\forall x_0, \ldots, x_n\ \exists x\ \left(x_n.x^n + x_{n-1}.x_{n-1} + \ldots + x_0 = 0\right)$$

(On vient d'écrire dans notre langage que tout polynôme à coefficients dans K a une racine ; remarquez qu'il nous a fallu une infinité d'énoncés pour écrire cela)

Exercice III.

Preuve du lemme 5.7.6. Soit T une théorie complète et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux modèles de T. Soit φ un énoncé qui est vrai dans $\mathcal{A}$. Alors, comme T est complète, on a $\varphi \in T$ ou $\neg\varphi \in T$; le deuxième cas est impossible puisque $\neg\varphi$ est faux dans $\mathcal{A}$, qui est un modèle de T. Par conséquent $\varphi \in T$, donc φ est vrai dans $\mathcal{B}$. On vient de montrer que tout énoncé vrai dans $\mathcal{A}$ est aussi vrai dans $\mathcal{B}$; la réciproque se montre de la même façon, et on voit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont élémentairement équivalents.
On vient donc de prouver que si T est une théorie complète, alors tous les modèles de T sont élémentairement équivalents.

Preuve du Lemme 5.7.8. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure dans le langage du premier ordre $\mathcal{L}$. Soit φ un énoncé ; alors φ est soit vrai soit faux dans $\mathcal{M}$ (c'est une conséquence importante de la définition de la satisfaction d'une formule dans une $\mathcal{L}$, que vous pouvez démontrer par récurrence sur la complexité de la formule), par conséquent soit $\varphi \in \mathcal{T}(\mathcal{M})$ soit $\neg\varphi \in \mathcal{T}(M)$, ce qui prouve que $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ est une théorie complète.

Pour deux $\mathcal{L}$-structures $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, dire que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ signifie qu'un énoncé est vrai dans $\mathcal{M}$ si, et seulement si, il est vrai dans $\mathcal{N}$, autrement dit si, et seulement si, $\mathcal{T}(\mathcal{M}) = \mathcal{T}(\mathcal{N})$.

Preuve du Lemme 5.7.9 Fixons un entier $n \geq 1$, et considérons l'énoncé φ_n suivant (rappelons que tous les langages considérés dans ce cours contiennent $=$) :

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$$

(Comme précédemment, on utilise la notation $x \neq y$ comme abréviation de $\neg(x = y)$). Alors, comme T est complète, on sait que pour tout entier $n \geq 1$ φ_n ou $\neg\varphi_n$ appartient à T ; mais on sait que T a un modèle infini $\mathcal{M}$, autrement dit chaque énoncé φ_n est vrai dans $\mathcal{M}$, par conséquent on doit avoir $\varphi_n \in T$. Donc tout modèle de T satisfait chacun des énoncés φ_n, par conséquent tout modèle de T est infini.

Remarque. On aurait pu simplement supposer que T est complète et a pour tout n un modèle de cardinal supérieur à n. Alors la même idée que ci-dessus permet de voir qu'en fait tous les modèles de T sont infinis.