Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2007/2008
Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Corrigé du DM 5

Exercice I.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un énoncé φ_n qui dise "le modèle a au moins n éléments" (on a vu de tels énoncés dans un DM précédent). Notons $T' = T \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\sigma\}$. Les modèles de T' sont exactement les modèles infinis de T qui satisfont $\neg\sigma$, et par hypothèse il n'y a pas de tel modèle. Donc T' est contradictoire, ce qui signifie (par compacité) qu'un fragment fini de T' est contradictoire. Mais un tel fragment doit être contenu dans un ensemble de la forme $T_1 \cup \{\varphi_n : n \in I\} \cup \{\neg\sigma\}$, où T_1 est un sous-ensemble fini de T et I est un ensemble fini d'entiers. Si l'on appelle N le plus grand élément de I, on voit en particulier que la théorie $T \cup \{\varphi_n : n \leq N\} \cup \{\neg\sigma\}$ est contradictoire, ce qui signifie exactement que tout modèle de T de cardinal supérieur ou égal à N doit satisfaire σ.

Exercice II.
Fixons un entier naturel b et une formule $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$. Dire que, pour tout k-uplet $(a_1, \ldots, a_k)$, ou l'ensemble des éléments x de l'univers qui satisfont $\phi(x, a_1, \ldots, a_k)$ a moins de b éléments, ou son complémentaire a moins de b éléments, peut s'exprimer par un énoncé du premier ordre dans notre langage (écrivez cet énoncé !). Par conséquent, s'il existe b_ϕ tel que cet énoncé est vrai dans $\mathcal{A}$, alors il est vrai aussi dans toute extension élémentaire de $\mathcal{A}$, ce qui prouve une des deux implications demandées dans l'exercice.
Pour prouver l'implication réciproque, on raisonne par contraposée. Supposons l'existence d'une L-formule $\phi(x, y_1, \ldots, y_k)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $(a_{1,n}, \ldots, a_{k,n}) \in A^k$ tel que

$$(\mathcal{A}, a)_{a\in A} \models \exists^{>n} x\phi(x, a_{1,n}, \ldots, a_{k,n}) \wedge \exists^{>n} x\phi(x, a_{1,n}, \ldots, a_{k,n}) \ .$$

Nous posons

$$\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}(A) \cup \{c_1, \ldots, c_k\} \cup \{b_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{b'_i | i \in \mathbb{N}\}$$

et

$$T^+ = Th((\mathcal{A}, a)_{a\in A}) \cup \{b_i \neq b_j \mid i \neq j\} \cup \{b'_i \neq b'_j \mid i \neq j\} \cup \{\phi(b_i; c_1, \ldots, c_k) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg\phi(b'_i; c_1, \ldots, c_k) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Une partie finie de T^+ fait intervenir au plus K des b_i et b'_j pour un certain $K \in \mathbb{N}$. Alors, on pose $c_i^{\mathcal{A}} = a_i^K$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $(\mathcal{A}, a)_{a\in A}$ est un modèle de la partie finie en question avec ses énoncés provenant de $Th((\mathcal{A}, a)_{a\in A})$ interprétés comme d'habitude. Par compacité, T^+ est consistant et un modèle $(\mathcal{B}, b_i^{\mathcal{B}}\ (i \in \mathbb{N}), b_i'^{\mathcal{B}}\ (i \in \mathbb{N}), c_1^{\mathcal{B}}, \ldots, c_k^{\mathcal{B}})$ de T^+, après réduction au langage $\mathcal{L}$ fournit l'extension élémentaire recherchée.

Exercice III.
On va voir deux façons de répondre à cette question (en ajoutant l'hypothèse - indispensable- selon laquelle la structure $\mathcal{M}$ est infinie). Commençons par noter X l'ensemble des termes dans le langage $\mathcal{L}$.

En pensant comme un théoricien des ensembles. Si $\mathcal{M}$ est de type fini alors on a par définition une partie finie M_0 de M telle que

$$M = \bigcup_{t\in X} \{t(A) \colon A \subset M_0\}$$

L'équation ci-dessus donne immédiatement $|M| \leq \mathcal{P}(M_0).|X|$. Donc toute $\mathcal{L}$-structure de type fini est de cardinal inférieur ou égal à $\aleph_0.|X|$; mais par le théorème de Löwenheim-Skolem ascendant on sait que pour tout cardinal κ assez grand il existe une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ de cardinal κ. En particulier il existe une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ qui n'est pas de type fini.

En pensant comme un théoricien des modèles.. On va encore utiliser la méthode des diagrammes et le théorème de compacité. On commence par rajouter à notre langage un symbole de constante c_m pour tout élément de M. Ensuite on rajoute un nouveau symbole de constante d. Dans ce langage augmenté, on peut pour tout terme $t \in X$ et toute partie finie $A \subset M$, écrire un énoncé $\phi_{A,t}$ qui dise "d n'est l'image d'aucune sous-partie finie de A par t".
Alors, considérons la théorie $T = Th((\mathcal{M}, m)_{m \in M}) \cup \{\phi_{A,t} \colon A \text{ finie } \subset M \text{ et } t \in X\}$. Pour vérifier que cette théorie est consistante, il suffit de prouver la consistance de ses fragments finis ; un tel fragment est contenu dans $Th((\mathcal{M}, m)_{m \in M}) \cup \{\phi_{A',t} \colon A' \subset A \text{ finie } \subset X \text{ et } t \in X_f\}$, où X_f est un ensemble fini de termes. On peut faire de $\mathcal{M}$ un modèle de cette théorie : comme M est infinie, il existe $x \in M$ qui n'est l'image d'aucune sous-partie de A par un des termes de X_f ; on peut interpréter d par x et obtenir un modèle de notre fragment fini, qui est donc consistant. Soit maintenant $\mathcal{M}_1$ un modèle de cette théorie ; alors le réduit de $\mathcal{M}_1$ au langage d'origine (encore noté $\mathcal{M}_1$) est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ (par construction) qui n'est pas engendrée par une partie finie de M (notre construction consiste à ajouter à $\mathcal{M}$ un témoin de ce fait). Mais on n'a rien fait pour éviter qu'une partie finie de M_1 n'engendre $\mathcal{M}_1$... Pour résoudre ce problème, on peut utiliser un argument de chaîne élémentaire : en répétant la construction précédente, on peut construire une suite $(\mathcal{M}_n)_{n<\omega}$ de $\mathcal{L}$-structures telles que $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, pour tout n $\mathcal{M}_{n+1}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}_n$, et il n'existe aucune partie finie de M_n qui engendre $\mathcal{M}_{n+1}$. Alors "au bout de la chaîne" on a construit une extension élémentaire $\mathcal{M}_\omega$, d'univers $M_\omega = \bigcup M_n$, qui est une extension élémentaire de chacun des $\mathcal{M}_n$ (construction vue en TD). Si l'on prend une partie finie A de M_ω, alors il existe $n < \omega$ tel que $A \subset M_n$; par construction on sait qu'il existe $x \in M_{n+1}$ qui n'est pas l'image d'une sous-partie de A sous l'action d'un terme, ce qui montre que $\mathcal{M}_\omega$ n'est pas finiment engendrée.

Remarque. La première preuve a l'air beaucoup plus courte, mais c'est simplement parce qu'elle utilise le théorème de Löwenheim-Skolem, qu'on a essentiellement redémontré dans la deuxième preuve...