Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2007/2008
Logique et théorie des ensembles

Corrigé du DM 6

1. Voici une façon possible de formuler $C_n(x)$:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \Big((\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} x_i \neq x_j) \wedge (\bigwedge_{1\leq i<j\leq n} R(x_i, x_j)) \wedge (\forall y(R(x,y) \rightarrow \bigvee_{1\leq i\leq n} y = x_i)) \Big)$$

En effet, la formule ci-dessus dit : “il existe n éléments deux à deux distincts et R-équivalents, tel que tout élément y satisfaisant xRy doit être un des x_i”.

2. On applique comme d’habitude la méthode des diagrammes. Considérons donc un modèle $\mathcal{M}$ de notre théorie, d’univers M, et ajoutons à notre langage un symbole de constante c_m pour tout $m \in M$. Ajoutons également, pour tout $n < \omega$, un symbole de constante d_n. Enfin, considérons l’ensemble d’énoncés T suivant dans le langage augmenté :

$$T = Th((\mathcal{M}, m)_{m\in M})) \cup \{\neg C_k(d_n) \colon k, n < \omega\} \cup \{\neg R(d_n, d_m) \colon n < m < \omega\}$$

Alors on vérifie sans peine que les fragments finis de cette théorie sont consistants (on peut faire de $\mathcal{M}$ un modèle de chaque fragment fini !), donc d’après le théorème de compacité il existe un modèle $\mathcal{N}$ de cette théorie. Un réduit de $\mathcal{N}$ au langage $\mathcal{L} = \{R\}$ est une extension élémentaire de $\mathcal{M}$, et notre construction assure que dans cette extension il y a une infinité de classes infinies (on a “forcé” la présence d’une infinité d’éléments deux à deux non équivalents et appartenant tous à une classe infinie).

3. Prenons α, $a_1, \dots, a_k$ et $b_1, \dots, b_k$ comme dans l’énoncé. On peut supposer $\alpha \neq a_i$ pour tout i. Examinons les cas possibles :

- Si $\mathcal{M} \models C_n[\alpha]$ pour un certain n, il y a forcément strictement moins de n a_i distincts dans cette n-classe, donc aussi strictement moins de n b_i dans cette n-classe (à cause de l’hypothèse (iii) faite sur $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots b_n)$) ; n’importe quel β dans la n-classe de N qui n’est égal à aucun des b_i convient.
- Si $\mathcal{M} \models R[(a_i, \alpha)]$ pour un certain i et on n’est pas dans le cas ci-dessous alors la R-classe de a_i est infinie ; c’est donc aussi le cas de la R-classe de b_i (toujours l’hypothèse (iii)), et n’importe quel point dans cette R-classe qui n’est égal à aucun des b_i convient.
- Le seul cas restant (et seul cas où on utilise le fait que $\mathcal{N}$ est riche) est celui où α n’est dans aucune classe finie et n’est en relation R avec aucun des a_i ; comme N contient une infinité de classes infinies, il existe $\beta \in N$ qui n’appartient à aucune classe finie est n’est en relation R avec aucun des b_i. Un tel β convient.

4. Raisonnons par récurrence sur la complexité de la formule φ. Si $(a_1, \dots, a_k)$ et $(b_1, \dots, b_k)$ sont comme au point 3., alors pour toute formule atomique ϕ on a $(\mathcal{M} \models \phi[(a_1, \dots, a_k)]) \Leftrightarrow (\mathcal{N} \models \phi[(b_1, \dots, b_k)])$. Cette équivalence est donc vraie aussi pour toute formule sans quantificateurs (vérifiez le ; cela a été fait plusieurs fois en TD et dans le cours).
Il nous reste donc à examiner le cas où $\phi(x_1, \dots, x_n)$ est de la forme $\exists x\, \psi(x_1, \dots, x_n, x)$, où ψ satisfait le résultat que l’on cherche à démontrer. Dans ce cas, si $\mathcal{M} \models \phi[(a_1, \dots, a_n)]$ alors il existe $\alpha \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \psi[(a_1, \dots, a_k, \alpha)]$. Puisque $\mathcal{N}$ est riche on peut trouver $\beta \in N$ tel que $(a_1, \dots, a_k, \alpha)$ et $(b_1, \dots, b_n, \beta)$ satisfont les conditions du point 3 ; par l’hypothèse de récurrence (appliquée à ψ) on doit donc avoir $\mathcal{N} \models \psi[(b_1, \dots, b_n, \beta)]$, ce dont on déduit que $\mathcal{N} \models \phi[(b_1, \dots, b_n)]$. Ceci montre l’implication recherchée.

5. Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux modèles de T et σ un énoncé. Ces deux modèles ont tous deux une extension élémentaire riche, notées $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{N}'$ respectivement. On sait alors, d'après le résultat de la question 4, que $\mathcal{M}' \models \sigma$ si et seulement si $\mathcal{N}' \models \sigma$. Comme par définition $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ satisfont les mêmes énoncés (et de même pour $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$), on voit que $\mathcal{M} \models \sigma$ si, et seulement si, $\mathcal{N} \models \sigma$. Donc tous les modèles de T sont élémentairement équivalents; autrement dit, la théorie T est complète.

6. On raisonne comme en TD; appelons $\mathcal{L}_1$ le langage $\mathcal{L} \cup \{C_n \colon n \in \mathbb{N}^*\}$ et commençons par fixer une $\mathcal{L}_1$-formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$ à exactement n variables libres (avec $n \geq 1$). Pour simplifier la rédaction, ajoutons encore au langage (en plus des C_k) n symboles de constante $d_1, \dots, d_n$, appelons $\mathcal{L}_2$ ce nouveau langage augmenté; pour simplifier, appelons toujours T notre théorie dans le langage $\mathcal{L}_2$, et considérons l'ensemble de $\mathcal{L}_2$-énoncés suivant :

$$\Gamma(\overline{d}) = \{\psi(\overline{d}) \colon \psi \text{ est sans quantificateurs et } T \vdash \big(\phi(\overline{d}) \to \psi(\overline{d})\big)\}$$

Lemme. $T \cup \Gamma(\overline{d}) \vdash \phi(\overline{d})$.

Pour établir cela, on raisonne par l'absurde : soit $\mathcal{M}$ un modèle de $T \cup \Gamma(\overline{d}) \cup \{\neg\phi(\overline{d})\}$. Alors on sait, à cause du point 4, que les formules sans quantificateurs satisfaites par $\overline{d}$ dans $\mathcal{M}$ suffisent à garantir $\neg\phi(\overline{d})$ (le va-et-vient dit : "si deux n-uplets réalisent les mêmes formules sans quantificateurs alors ils réalisent les mêmes formules, i.e ils ont même type"). Formellement, on introduit l'ensemble de $\mathcal{L}_2$-énoncés

$$\Sigma(\overline{d}) = \{\tau(\overline{d}) \colon \tau \text{ est sans quantificateurs et } \mathcal{M} \models \tau(\overline{d})\}$$

On voit que $T \cup \Sigma(\overline{d}) \vdash \neg\phi(\overline{d})$: $\Sigma(\overline{d})$ décrit toutes les formules sans quantificateurs réalisées par $\overline{d}$ interprété dans $\mathcal{M}$, et le point 4 dit que si deux n-uplets, vivant dans deux modèles quelconques de T, réalisent les mêmes $\mathcal{L}_1$-formules sans quantificateurs alors ils réalisent les mêmes $\mathcal{L}_1$ formules (remarque : on n'a montré cela que pour les modèles riches, voyez-vous pourquoi c'est aussi vrai pour tout modèle ?).

Par compacité il existe k formules $\tau_1, \dots, \tau_k$ dans $\Sigma(\overline{d})$ telles que

$$T \vdash \Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \tau_i(\overline{d}) \ \to \ \neg\phi(\overline{d}) \ \Big)$$

Mais alors (par contraposée) on a $\bigvee_{1 \leq i \leq n} \neg\, \tau_i(\overline{d}) \in \Gamma(\overline{d})$; donc $\mathcal{M}$ doit être un modèle de $\bigvee_{1 \leq i \leq n} \neg\, \tau_i(\overline{d})$, ce qui est impossible puisque les $\tau_i(\overline{d})$ sont par définition vraies dans $\mathcal{M}$. Ceci conclut la preuve du lemme.

Une fois le lemme établi, il ne nous reste plus qu'à utiliser une dernière fois le théorème de compacité : on voit qu'il existe des formules $\psi_1, \dots, \psi_p \in \Gamma(\overline{d})$ telles que

$$T \vdash \ \Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq p} \psi_i(\overline{d}) \to \phi(\overline{d}) \ \Big)$$

Par définition, l'implication réciproque est vraie (les ψ_i sont dans $\Gamma(\overline{d})$) et on a donc (dans le langage $\mathcal{L}_2$)

$$T \vdash \ \Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq p} \psi_i(\overline{d}) \leftrightarrow \phi(\overline{d}) \ \Big) \ .$$

Dit sans utiliser de paramètres (c'est-à-dire en revenant au langage $\mathcal{L}_1$), ceci s'écrit :

$$T \vdash \ \forall x_1, \dots, x_n \ \Big(\bigwedge_{1 \leq i \leq p} \psi_i(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \dots, x_n) \ \Big) \ .$$

La formule $\bigwedge_{1 \leq i \leq p} \psi_i(x_1, \dots, x_n)$ est sans quantificateurs par définition, ce qui finit la preuve que la théorie T, vue dans le langage $\mathcal{L}_1$, a la propriété d'élimination des quantificateurs.

Retour sur cette preuve. Considérons deux n-uplets $\overline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\overline{b} = (b_1, \dots, b_n)$, qu'on suppose appartenir aux univers de deux modèles riches de T. On a vu au point 4 que si $\overline{a}$ et $\overline{b}$ réalisent les mêmes formules sans quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}_1$ alors ils réalisent les mêmes formules, autrement dit ils ont même type.

Dit rapidement : "'dans la théorie T (vue dans le langage $\mathcal{L}_1$), si $\overline{a}$ et $\overline{b}$ ont le même type sans quantificateurs alors ils ont le même type"'. Le point 6 explique comment déduire de ce fait qu'en réalité toute formule à au moins une variable libre est équivalente à une formule sans quantificateurs et aux mêmes variables libres. (Réciproquement, si toute formule est équivalente à une formule sans quantificateurs, il est clair que deux n-uplets qui ont le même type sans quantificateurs ont le même type !).
La dernière question est une conséquence directe de l'élimination des quantificateurs : soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux modèles de T tel que $\mathcal{A}$ soit une sous-structure de $\mathcal{B}$. Prenons $a_1, \ldots, a_n \in A$, et une formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $\mathcal{A} \models \phi[(a_1, \ldots, a_n)]$. Alors ϕ est équivalente à une formule ψ sans quantificateurs, et par définition d'une sous-structure (et l'énoncé 5.5.3 des notes de cours) on a $\mathcal{B} \models \psi[(a_1, \ldots, a_n)]$, donc aussi $\mathcal{B} \models \phi[(a_1, \ldots, a_n)]$.