Université Claude Bernard Lyon I — Master 1

2nd semestre 2007/2008 — Logique et théorie des ensembles

Corrigé du DM 7

Preuve du Théorème 7.3.

Soient $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ comme dans l'énoncé. Notons $M = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ et $N = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$ les univers respectifs de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Commençons par prouver qu'on peut par récurrence construire des suites d'éléments $(x_n) \in M^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in M^{\mathbb{N}}$ telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{2n} = a_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}\ y_{2n+1} = b_n$
- $\forall n\ \ (x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ satisfont les mêmes $\mathcal{L}$-formules.

En effet, supposons la construction effectuée jusqu'au rang n (éventuellement $n = -1$, cas où on commence la construction) ; traitons d'abord le cas où $n + 1 = 2k$. Alors on doit poser $x_{n+1} = a_k$. Reste à définir y_{n+1} ; soit $p(x) = tp_{\mathcal{M}}(x_{n+1}/\{x_1, \dots, x_n\})$. Ce type correspond à un unique type $q(x)$ au-dessus de $y_1, \dots, y_n$ (celui qu'on obtient en remplaçant $x_1, \dots, x_n$ par $y_1, \dots, y_n$ respectivement dans les formules de p), qui doit être réalisé dans $\mathcal{N}$ puisque $\mathcal{N}$ est ω-saturée. Tout y tel réalisant ce type est par définition tel que $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ et $(y_1, \dots, y_n, y)$ satisfont les mêmes $\mathcal{L}$-formules ; autrement dit, poser $y_{n+1} = y$ nous permet de prolonger la construction.

Le cas où $n+1$ est impair se traite exactement de la même façon, en échangeant les rôles de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ (et donc en utilisant cette fois l'hypothèse selon laquelle $\mathcal{M}$ est ω-saturé).

Soit alors $f : M \to N$ l'application définie par $f(a_i) = b_i$. Cette fonction est injective (le langage $\mathcal{L}$ est égalitaire...), définie sur M tout entier (au rang $2n$ on a assuré que f est définie en x_n) et surjective par construction (au rang $2n + 1$ on a assuré que y_n est dans l'image de f) ; de plus, la construction assure aussi que pour toute $\mathcal{L}$ formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$ on a, pour tout n-uplet $m_1, \dots, m_n \in M$

$$\mathcal{M} \models\ \phi[(m_1, \dots, m_n)] \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi[(f(m_1), \dots, f(m_n)]$$

Autrement dit, f est un isomorphisme entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$.

Preuve du Lemme 7.3.5(1).

C'est essentiellement la même idée que ci-dessus. Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ comme dans l'énoncé du lemme et $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ une partie finie de N. Soit $p(x)$ un élément de $S_1^{\mathcal{N}}(B)$. Puisque $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont ∞-équivalentes, il existe $(a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathcal{M}$ tel que $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ ont même type (c'est-à-dire : satisfont les mêmes formules). Comme ci-dessus, on considère l'élément $q(x)$ de $S_1^{\mathcal{M}}(\{a_1, \dots, a_n\})$ obtenu en remplaçant chaque b_i par a_i dans les formules de p. Ce type est réalisé dans $\mathcal{M}$ par hypothèse, par un élément $a \in M$. On sait qu'il existe $b \in N$ tel que $(a_1, \dots, a_n, a)$ et $(b_1, \dots, b_n, b)$ ont même type, autrement dit b réalise $p(x)$.

Exercice II.

Qu'aurait dû être un énoncé démontrable ?

Soient $\mathcal{L}$ un langage, T une $\mathcal{L}$-théorie complète dont les modèles sont infinis et κ un cardinal infini. Montrer que si pour tout ensemble de paramètres A de cardinal au plus κ, le cardinal de $S_1^{\mathcal{M}}(A)$ est au plus κ, $\mathcal{M}$ étant un modèle quelconque de T contenant A, alors $|S_k^{\mathcal{M}}(A)| \leq \kappa$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : Dans l'énoncé ci-dessus, on peut remplacer "modèle quelconque de T contenant A" par "modèle κ^+-saturé de T contenant A".

Il suffit de considérer le passage de $S_k^{\mathcal{M}}(A)$ à $S_{k+1}^{\mathcal{M}}(A)$. Pour ce faire, on commence par le constat que si $p \in S_{k+1}^{\mathcal{M}}(A)$ alors la restriction de p à $S_k^{\mathcal{M}}(A)$, en d'autres termes la famille de $\mathcal{L}(A)$-formules à au plus k variables libres définie par $p \cap S_k^{\mathcal{M}}(A)$, est un k-type. Alors, $p \cap S_k^{\mathcal{M}}(A)$ est réalisé dans une extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$

par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Alors on applique l'hypothèse de départ dans $\mathcal{N}$ à la famille de paramètres $A \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ pour conclure que $S_1^{\mathcal{N}}(A \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\})$ est de cardinal au plus κ. Par récurrence, il existe au plus κ choix de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ donnant des k-types deux à deux distincts sur A puisque pour toute extension élémentaire $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, $S_k^{\mathcal{N}}(A) = S_k^{\mathcal{M}}(A)$ (le lemme 7.2.3 qui était aussi étudié en cours). Or $\kappa \times \kappa = \kappa$.

Exercice III.
1. On veut montrer que les modèles ω-saturés de T sont exactement ceux qui ont une infinité de classes infinies ; pour cela, on va utiliser le fait que la théorie a la propriété d'élimination des quantificateurs.
Commençons par le plus facile ; soit $\mathcal{M}$ un modèle ω-saturé. Pour toute partie finie $A \subset M$, notons $\mathcal{L}(A)$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathcal{L}$ un symbole de constante pour chaque $a \in A$; on vérifie en utilisant le théorème de compacité que l'ensemble de $\mathcal{L}(A)$-énoncés $\{\neg R(x, c_a) \colon a \in A\} \cup \{\neg C_n(x) \colon n \in \mathbb{N}^*\}$ est consistant. Par conséquent il est contenu dans un 1-type sur A, qui doit être réalisé dans $\mathcal{M}$ puisque A est finie et $\mathcal{M}$ est ω-saturé. On vient de prouver que pour toute partie finie $A \subset M$ il existe $x \in M$ tel que x apartient à une classe infinie et x n'est dans la classe d'aucun élément de A. On en déduit facilement que $\mathcal{M}$ a une infinité de classes infinies.
Soit maintenant $\mathcal{M}$ un modèle à une infinité de classes infinies, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une partie finie de M et p un élément de $S_1^{\mathcal{M}}(A)$. Remarquons qu'on a vu dans le DM 6 que deux $n+1$-uplets ont même type si, et seulement si, ils satisfont les mêmes formules atomiques dans le langage $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{C_n \colon n \in \mathbb{N}^*\}$. Par conséquent, deux éléments x et y (dans une extension élémentaire quelconque de $\mathcal{M}$) ont même type sur A si, et seulement si, ils satisfont les mêmes formules atomiques dans le langage $\mathcal{L}(A)^+ = \mathcal{L}(A) \cup \{C_n \colon n \in \mathbb{N}^*\}$.
N'importe quel 1-type sur A est donc complètement déterminé par un ensemble d'énoncés qui appartient à l'une des familles suivantes :

- $\{x = c_{a_i}\}$ (pour un certain i)
- $\{x \neq c_{a_i} \colon 1 \leq i \leq n\} \cup \{C_p(x)\} \cup \{\bigwedge_{i \in I} R(x, c_{a_i}) \wedge \bigwedge_{i \in J}(\neg R(x, c_{a_i}))\}$, où p est un entier non nul et I, J forment une partition de $\{1, \ldots, n\}$.
- $\{x \neq c_{a_i} \colon 1 \leq i \leq n\} \cup \{\neg C_p(x) \colon p \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\bigwedge_{i \in I} R(x, c_{a_i}) \wedge \bigwedge_{i \in J}(\neg R(x, c_{a_i}))\}$, où I, J forment une partition de $\{1, \ldots, n\}$.

Il est clair que tous les éléments consistants de chacune de ces trois familles sont bien réalisés dans un modèle qui a une infinité de classes infinies (ce qui est utilisé pour réaliser les types de la troisième famille), ce qui montre qu'un tel modèle est ω-saturé.
2. Soient $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ et ϕ comme dans l'énoncé. Dans le langage $\mathcal{L}(A)^+$, (défini comme au point 1) ϕ est équivalente à une formule ψ sans quantificateurs et avec les mêmes variables libres. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ (un majorant strict de l'ensemble des j tels que C_j intervient dans l'écriture de ψ et de l'ensemble des indices des classes finies qui contiennent un des a_i) tel que, $\psi(x, a_1, \ldots, a_k)$ est vraie pour tout élément de $E = \bigcup_{p \geq n}\{x \in M \colon C_p(x)\}$, ou fausse pout tout élément de E. Ceci prouve que $\phi(N, a_1, \ldots, a_k)$ coupe un nombre fini ou co-fini de classes finies.
En particulier, puisque $\mathcal{M}$ ne contient que des classes finies, tout ensemble définissable dans $\mathcal{M}$ est la réunion d'un nombre fini ou cofini de classes finies, et est donc lui-même fini ou cofini.
3. Soient x, y dans N qui appartiennent tous deux à des classes infinies différentes des classes des a_i. Alors par la description des types du point 1, x et y ont même type sur A. D'après le théorème 7.6 du cours, il existe une extension élémentaire $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{N}$ et un automorphisme de $(\mathcal{N}', a)_{a \in A}$ qui envoie x sur y. Donc $x \in \phi(N', c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \Leftrightarrow y \in \phi(N', c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$ (un automorphisme de $(\mathcal{N}, a)_{a \in A}$ est un automorphisme de $\mathcal{N}'$ qui fixe chaque a_i $(1 \leq i \leq n)$. Mais comme $\mathcal{N}'$ est une extension élémentaire de $\mathcal{N}$, on a

$$\phi(N, c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = N \cap \phi(N', c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \ .$$

En d'autres termes, $x \in \phi(N, c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \Leftrightarrow y \in \phi(N, c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, ce qui conclut la réponse à cette question.
4. Soit $\mathcal{N}$ n'importe quelle extension élémentaire stricte de M ; N doit avoir un élément a dont la classe est infinie. L'ensemble défini dans N par la $\mathcal{L}(\{a\})$-formule "$R(x, c_a)$" est infini, ainsi que son complémentaire. On voit donc qu'aucune extension élémentaire stricte de M n'est minimale.
Ce qu'on vient d'écrire montre que la formule "$R(x, y)$" contredit le critère de minimalité forte du DM5.
5. (i) Pour déterminer $|S_k(T)|$, on peut commencer par le théorème 7.5 des notes de cours. En effet, le langage que nous utilisons est dénombrable. Par ailleurs, comme on peut trouver un modèle à une infinité dénombrable de classes infinies et dénombrables, d'après la question III.1 ci-dessus T a un modèle ω-saturé et dénombrable. C'est un (le) modèle où tous les types dans $S(T)$ seront réalisés. Alors on utilise les connaissances des théories

des ensembles et la définition $S(T) = \cup_{k\in\mathbb{N}} S_k(T)$ pour conclure que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|S_k(T)| \leq \aleph_0$.

Puisque nous avons la description complète des 1-types dans la question III.1, il suffit de vérifier que $|S_1(T)| \leq |S_k(T)|$ pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$. Plus généralement on peut vérifier que $|S_k(T)| \leq |S_{k+n}(T)|$ pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. En effet, si p_1 et p_2 sont deux types distincts dans $S_k(T)$, alors il existe une $\mathcal{L}$-formule θ à au plus k variables libres telle que $\theta \in p_1$ et $\neg\theta \in p_2$. Ces deux formules séparent les deux ensembles à au plus $k+n$ variables libres que sont p_1 et p_2, ainsi que leurs complétions à des $(k+n)$-types.

(ii) Pour le point (ii), nous retournons au lemme 7.3.9 des notes et à sa preuve. Soit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Alors, on définit l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \iota & : & S_k(A) & \longrightarrow & S_{k+n}(T) \\ & & \mathrm{tp}_{\tilde{\mathcal{M}}}(\overline{b}/A) & \longmapsto & \mathrm{tp}_{\tilde{\mathcal{M}}}(\overline{b}, a_1, \ldots, a_n) \ . \end{array}$$

L'application ι est injective. En effet, si p_1 et p_2 sont deux types distincts dans $\mathrm{tp}_{\tilde{\mathcal{M}}}(\overline{b}/A)$, alors il existe une $\mathcal{L}(A)$-formule θ telle que $\theta \in p_1$ et que $\neg\theta \in p_2$. Si $\overline{b}$ et $\overline{b}'$ sont deux réalisations dans $\tilde{\mathcal{M}}$ de p_1 et p_2 respectivement, alors θ sépare aussi les types $\mathrm{tp}(\overline{b}, a_1, \ldots, a_n)$ et $\mathrm{tp}(\overline{b}', a_1, \ldots, a_n)$. Dans la littérature, parfois on dit que “le type de $\overline{b}$ sur $\overline{a}$ est déterminé par le type de $(\overline{b}, \overline{a})$”.

Une conséquence directe du paragraphe précédent est que $|S_k(A)| \leq |S_{k+n}(T)|$. Par ailleurs, d'après le lemme 7.2.4 du cours, chaque élément de $S_k(T)$ s'étend à un type dans $S_k(A)$. Un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent montre alors que deux types distincts dans $S_k(T)$ s'étendent à deux familles disjointes de types dans $S_k(A)$. Par conséquent, $|S_k(T)| \leq |S_k(A)|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ces conclusions et le point (i) montrent alors que $|S_k(A)| = \aleph_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

5.(iii) Montrons d'abord que $|S_1^{\mathcal{N}}(A)| = \aleph_0$. Nous savons que la théorie élimine les quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}^+$. Alors, pour toute formule $\phi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ à exactement une variable libre avec $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset A$ il existe une $\mathcal{L}(\{a_1, \ldots, a_k\})^+$-formule sans quantificateur $\psi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})$ à exactement une variable libre telle que

$$T \vdash \forall x(\phi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k}) \leftrightarrow \psi(x; c_{a_1}, \ldots, c_{a_k})) \ .$$

Par conséquent, tout 1-type sur A est déterminé par le positionnement d'une de ses réalisations par rapport aux éléments de A et aux classes finies. Par rapport à l'étude d'un 1-type sur un ensemble fini de paramètres, le seul changement est qu'il existe plus de possibilités par rapport aux classes des paramètres. Plus précisément, il faut considérer tous les cas $R(x, c_{a_i})$ (respectivement, $\neg R(x, c_{a_i})$). Or, cette discussion de cas est réduite aux deux possibilités suivantes :

- le type entraîne $\neg R(x, c_{a_i})$ pour tout $i \in \mathbb{N}$;

- le type entraîne $R(x, c_{a_i})$ pour un certain $i \in \mathbb{N}$.

Il en découle qu'il n'existe que $\aleph_0$ types sur A.

A ce stade, on peut résister à la tentation d'appliquer la règle générale de comptage de l'exercice II, et utiliser les propriétés de la théorie que nous étudions pour déduire le cardinal de $S_k(A)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ suivant la méthode du $k = 1$.