Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2007/2008
Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Corrigé du DM 8

1. Supposons que pour toute formule $\psi(x,y_1,\dots,y_l)$ à exactement l variables libres $\mathcal{M}$ satisfasse l'énoncé fourni par le sujet (pour un certain n_ψ). Cet énoncé étant du premier ordre, il est vrai dans toute extension élémentaire $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$. Fixons maintenant $(m_1,\dots,m_l)\in(M')^l$. Alors le fait que l'énoncé donné par le sujet soit vrai garantit que soit $\phi(\mathcal{M}',a_1,\dots,a_k)\cap\psi(\mathcal{M}',m_1,\dots,m_l)$ est fini (de cardinal inférieur à n_ψ) soit $\phi(\mathcal{M}',a_1,\dots,a_k)\cap\neg\psi(\mathcal{M}',m_1,\dots,m_l)$ est fini (et de cardinal inférieur à n_ψ). Autrement dit $\phi(\mathcal{M}',a_1,\dots,a_k)$ est minimal, et donc $\phi(\mathcal{M},m_1,\dots,m_k)$ est fortement minimal.
Réciproquement, s'il existe une formule ψ telle que pour tout n l'énoncé du sujet ne soit pas dans $Th(\mathcal{M})$ alors on voit que l'ensemble de négations de ces énoncés est finiment consistant avec $Th(\mathcal{M})$, et donc consistant par compacité. Par suite il existe une extension élémentaire de $\mathcal{M}$ dans laquelle les négations de ces énoncés sont toutes vraies, autrement dit une extension élémentaire $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ dans laquelle il existe un l-uplet $(m_1,\dots,m_l)$ tel que $\phi(\mathcal{M}',a_1,\dots,a_k)\cap\psi(\mathcal{M}',m_1,\dots,m_l)$ et $\phi(\mathcal{M}',a_1,\dots,a_k)\cap\neg\psi(\mathcal{M}',m_1,\dots,m_l)$ soient tous deux infinis, ce qui prouve qu'alors $\phi(\mathcal{M},a_1,\dots,a_k)$ n'est pas fortement minimale.

2. Il s'agit juste de comparer les deux définitions : une structure $\mathcal{M}$ est fortement minimale au sens du cours si, et seulement si, pour toute extension élémentaire $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$, tout k-uplet $(m_1,\dots,m_k)\in M^k$ et toute formule $\psi(a_1,\dots,a_k)$, l'ensemble $\psi(\mathcal{M},m_1,\dots,m_k)$ est fini ou cofini. Comme la formule $x=x$ définit tout l'univers d'une structure, on voit donc que $\mathcal{M}$ est fortement minimale au sens du cours si et seulement si la partie de $\mathcal{M}$ définie par la formule $x=x$ (autrement dit, M) est fortement minimale.

3(i) Comme la notion de clôture algébrique a été définie en utilisant un modèle d'une théorie complète, en l'occurrence $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$, il faut vérifier que $\mathrm{acl}(A)$ est le même ensemble si la même définition est appliquée dans un autre modèle. Ce souci peut paraître exagéré dans ce cas où la réponse est assez évidente mais en général nous savons très bien que les propriétés d'une structure particulière ne sont pas nécessairement des propriétés da sa théorie. Soit donc $\mathcal{M}'$ un autre modèle de $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ dont l'univers M' contient A. Etant les modèles d'une même théorie complète, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont élémentairement équivalents. D'après la proposition 6.2.4, ils ont une extension élémentaire $\tilde{\mathcal{M}}$ commune. Or si $\phi(x)$ est une $\mathcal{L}(A)$-formule algébrique, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{M}\models\exists^{=n}\phi(x)$ si et seulement si $\mathcal{M}'\models\exists^{=n}\phi(x)$ si et seulement si $\tilde{\mathcal{M}}\models\exists^{=n}\phi(x)$.

(ii) Comme le langage $\mathcal{L}$ est dénombrable, il n'y a que $\aleph_0$ $\mathcal{L}$-formules. Si A est fini, alors la réunion disjointe des A^k est au plus dénombrable (chacun de ces ensembles est fini) ; si A est infini alors chaque A^k est de même cardinal que A, donc dans tous les cas on voit que le cardinal de la réunion disjointe des A^k est inférieur à $|A|+\aleph_0$. Pour chaque élément de cette réunion disjointe (i.e, pour un uplet $(a_1,\dots,a_k)$ quelconque) et à chaque formule $\phi(x,a_1,\dots,a_k)$ correspondent un nombre fini (éventuellement nul) d'éléments de $\mathrm{acl}(A)$: l'ensemble $\phi(\mathcal{M},a_1,\dots,a_k)$ si celui-ci est fini, $\emptyset$ sinon. Comme $\mathrm{acl}(A)$ est défini comme la réunion de ces ensembles, on voit que
$$|\mathrm{acl}(A)|\leq(|A|+\aleph_0).\aleph_0=|A|+\aleph_0\ .$$

4(i) Soit $a\in A$; alors bien sûr la $\mathcal{L}(A)$-formule $x=a$ définit le singleton $\{a\}$, ce qui prouve que $a\in\mathrm{acl}(A)$. (rappelons que pour simplifier la notation on ne fait pas de distinction entre un élément de A et le symbole de constante qui lui est associé dans le langage étendu)
(ii) Une $\mathcal{L}(A)$-formule est aussi une $\mathcal{L}(B)$-formule ; explicitement, soient $x\in M$,$\phi(x,y_1,\dots,y_k)$ une formule à exactement $k+1$ variables libres et $(a_1,\dots,a_k)\in A^k$ tel que $\phi(\mathcal{M},a_1,\dots,a_k)$ soit fini et $x\in\phi(\mathcal{M},a_1,\dots,a_k)$. Alors comme $(a_1,\dots,a_k)\in B^k$, on voit que par définition $x\in\mathrm{acl}(B)$.
(iii) Soit $x\in\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$, et une formule $\phi(x,y_1,\dots,y_k)$ ainsi que $(m_1,\dots,m_k)\in(\mathrm{acl}(A))^k$ qui témoignent de ce fait. Pour chaque i il existe une $\mathcal{L}(A)$-formule $\psi_i(x,y_1,\dots,y_{p_i})$ et un p_i-uplet $(b^i_1,\dots,b^i_{p_i})$ d'éléments

de A tels que $m_i \in \psi_i(\mathcal{M}, b_1, \dots, b_{p_i})$ et cet ensemble soit fini. Notons $p = \sum_{i=1}^n p_i$ et considérons le p-uplet $b_1, \dots, b_p$ obtenu en "'mettant bout à bout"' tous les b_j^i, puis considérons la $\mathcal{L}$(A)-formule à $k+1$ variables libres $\psi(x_1, \dots, x_k, b_1, \dots, y_p)$ définie par

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \psi_i(x_i, b_1^i, \dots, b_{p_i}^i)$$

Alors on a envie de considérer la formule définie par

$$\exists y_1 \dots \exists y_k \big(\psi(y_1, \dots, y_k, b_1, \dots, b_p) \wedge \phi(x, y_1, \dots, y_k)\big)$$

En effet, cette formule est bien une $\mathcal{L}(A)$-formule satisfaite par x, et pour conclure il suffirait de prouver que l'ensemble défini dans M par cette formule est fini. L'idée est que par définition il n'y a qu'un nombre fini d'uplets $(c_1, \dots, c_k)$ d'éléments de M qui satisfont $\psi(c_1, \dots, c_k, b_1, \dots, b_p)$; le problème est qu'a priori rien n'empêche que pour un de ces uplets l'ensemble des x satisfaisant $\phi(x, c_1, \dots, c_k)$ soit infini. C'est là qu'il faut penser aux types : $(m_1, \dots, m_k)$ est tel que $\phi(\mathcal{M}, m_1, \dots, m_k)$ est de cardinal fini, disons n. Mais on peut exprimer par une formule du premier ordre $\chi(y_1, \dots, y_k)$ le fait qu'il existe n éléments x satisfaisant $\phi(y_1, \dots, y_k)$; cette formule est satisfaite par $(m_1, \dots, m_k)$ (autrement dit, elle appartient au k-type qui est réalisé par $(m_1, \dots, m_k)$) et on peut finalement considérer la $\mathcal{L}(A)$-formule $\tau(x, b_1, \dots, b_p)$ définie par

$$\exists y_1 \dots \exists y_k \big(\psi(y_1, \dots, y_k, b_1, \dots, b_p) \wedge \chi(y_1, \dots, y_k) \wedge \phi(x, y_1, \dots, y_k)\big)$$

Alors $x \in \tau(\mathcal{M}, b_1, \dots, b_p)$ et cet ensemble est fini, puisqu'il n'existe dans M qu'un nombre fini de k-uplets $(n_1, \dots, n_k)$ satisfaisant $\psi(n_1, \dots, n_k) \wedge \chi(n_1, \dots, n_k)$ et que pour chacun de ces $(y_1, \dots, y_k)$ l'ensemble des $z \in M$ tels que $\mathcal{M} \models \phi(z, n_1, \dots, n_k)$ est fini.
(iv) Soit $a \in \mathrm{acl}(A)$; par définition il existe une $\mathcal{L}$-formule $\phi(x, y_1, \dots, y_k)$ à $k+1$ variables libres et un k-uplet $(a_1, \dots, a_k)$ tel que $a \in \phi(\mathcal{M}, a_1, \dots, a_k)$ et cet ensemble soit fini. Mais alors il suffit de regarder la définition pour voir que $a \in \mathrm{acl}(\{a_1, \dots, a_k\})$, ce qui répond à la question posée.

5. Dans cette question pour être rigoureux il faut supposer que $\{m_1, \dots, m_k\} \subset A$; B ne joue aucun rôle donc on peut supposer $B = \emptyset$.
(i) On raisonne par l'absurde : si $f \in \mathrm{acl}(A)$ alors on a $A \cup \{f\} \subset \mathrm{acl}(A)$ et donc, d'après 4.(ii), on voit que $\mathrm{acl}(A \cup \{f\}) \subset \mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A))$, autrement dit (d'après 4(iii)) on a $\mathrm{acl}(A \cup \{f\}) \subset \mathrm{acl}(A)$. L'inclusion réciproque est une conséquence de 4(i) et 4(ii). On voit donc que si $f \in \mathrm{acl}(A)$ alors $\mathrm{acl}(A \cup \{f\}) = \mathrm{acl}(A)$ et donc $\mathrm{acl}(A \cup \{f\}) \setminus \mathrm{acl}(A) = \emptyset$, ce qui est impossible puisque $e \in \mathrm{acl}(A \cup \{f\}) \setminus \mathrm{acl}(A)$.
(ii) Notons $\tau(x, y)$ la formule à deux variables libres $\psi(x, y) \wedge \exists^{=k} z \psi(z, y)$. Comme ϕ est fortement minimale on sait que soit $\theta(\mathcal{M}, e) = \phi(\mathcal{M}, m_1, \dots, m_k) \cap \psi(\mathcal{M}, e)$ est fini soit $\phi(\mathcal{M}, m_1, \dots, m_k) \cap \neg\psi(\mathcal{M}, e)$ est fini. Ici on est nécessairement dans le deuxième cas ; on voit donc que $\theta(\mathcal{M}, e)$ est cofini dans $\phi(\mathcal{M}, m_1, \dots, m_k)$ (il n'est pas cofini dans M, sauf si $\phi(\mathcal{M}, m_1, \dots, m_k)$ est lui-même cofini). Autrement dit $\neg\theta(\mathcal{M}, e) \cap \phi(\mathcal{M}, m_1, \dots, m_k)$ est de cardinal n pour un certain n, et ceci s'exprime par une $\mathcal{L}(A)$-formule du premier ordre $\rho(x)$, qui est bien sûr satisfaite par e.
(iii) Si $\rho(x)$ définit une partie finie de $\phi(\mathcal{M}, m_1, \dots, m_k)$, alors $e \in \mathrm{acl}(A)$, ce qui est impossible. Donc $\rho(x)$ définit une partie cofinie de $\phi(\mathcal{M}, m_1, \dots, m_k)$, et on peut trouver des éléments $x_1, \dots, x_{k+1}$ deux à deux distincts et tels que $\mathcal{M} \models \rho(x_i)$, autrement dit $\theta(\mathcal{M}, x_i)$ est cofini dans $\phi(\mathcal{M}, m_1, \dots, m_k)$. Il existe donc $b \in M$ tel que $b \in \cap_{i=1}^{k+1} \theta(\mathcal{M}, x_i)$. De ceci on déduit que $\mathcal{M} \models \psi(b, x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, k+1\}$ et en même temps qu'il existe exactement k éléments $m \in M$ tels que $\mathcal{M} \models \psi(m, b)$, autrement dit on arrive à une contradiction.
Par conséquent $\theta(\mathcal{M}, e)$ est fini, ce qui prouve bien que $f \in \mathrm{acl}(A \cup \{e\})$.

6(i) On raisonne comme pour montrer qu'un espace vectoriel admet une base (donc on se doute qu'il va falloir utiliser l'axiome du choix...) : on considère l'ensemble formé par les parties indépendantes de E, et on ordonne cet ensemble par l'inclusion. Pour montrer que cet ensemble ordonné est inductif, considérons une famille $(B_i)_{i \in I}$ de parties indépendantes et telle que $(B_i)_{i \in I}$ est totalement ordonné par l'inclusion. Comme prévu, on pose $B = \cup_{i \in I} B_i$, et on voudrait prouver que B est indépendant. Soit $e \in B$. Si $e \in \mathrm{acl}(B \setminus \{e\})$, alors d'après

4(iv) il existe $b_1, \dots, b_n \in B$ tous distincts de e et tels que $e \in \mathrm{acl}(\{b_1, \dots, b_n\})$. Mais comme la famille (B_i) est totalement ordonnée par la relation d'inclusion on peut trouver $i \in I$ tel que $\{e\} \cup \{b_1, \dots, b_n\} \in B_i$, ce qui contredit le fait que B_i est indépendant. On voit donc finalement que B est indépendant.
En appliquant le lemme de Zorn, on voit qu'il existe un ensemble B indépendant et maximal pour l'inclusion. Il nous reste à montrer que pour un tel B on a nécessairement $\mathrm{acl}(B) = E$. Remarquons que pour l'instant on n'a pas utilisé le fait que E est fortement minimal ; cela va être essentiel maintenant.
Prenons $e \in E \setminus B$, et notons $B' = B \cup \{e\}$; alors B' contient strictement B et donc (par maximalité) ne peut pas être indépendant. La première possibilité est que $e \in \mathrm{acl}(B)$ (ce qu'on veut démontrer) ; la deuxième possibilité est qu'il existe $b \in B$ tel que $b \in \mathrm{acl}(B' \setminus \{b\})$; alors $b \in \mathrm{acl}((B \setminus \{b\}) \cup \{e\}) \setminus \mathrm{acl}(B \setminus \{b\})$. Mais alors le résultat obtenu au point 5 permet de voir que $e \in \mathrm{acl}(B \setminus \{b\} \cup \{b\}) = \mathrm{acl}(B)$. Dans les deux cas on obtient donc $e \in \mathrm{acl}(B)$, ce qui montre que, toute partie indépendante maximale pour l'inclusion est une base.
(ii) Commençons par rappeler que, si B est un ensemble quelconque, on a $|B| \le |\mathrm{acl}(B)| \le |B| + \aleph_0$. Ceci montre que B est non dénombrable si, et seulement si, $\mathrm{acl}(B)$ est non dénombrable, et qu'on a dans ce cas $|\mathrm{acl}(B)| = |B|$. Ceci permet de vérifier facilement que s'il existe une base non dénombrable B alors toutes les bases sont non dénombrables, et de même cardinal que E ; donc dans ce cas toutes les bases sont de même cardinal.
Examinons maintenant le cas où il existe une base B_1 de cardinal n (pour un certain $n \in \mathbb{N}$) ; on va utiliser le résultat du point 5. On va montrer (comme pour un espace vectoriel...) qu'il n'existe pas d'ensemble indépendant de cardinal supérieur ou égal à $n+1$.
Pour cela, on raisonne par l'absurde : supposons que $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ est indépendant (les a_i étant deux à deux distincts). On peut supposer que $a = a_1 \notin B$. Il existe un sous-ensemble $B' \subset B$ de cardinalité minimale (et nécessairement non vide) tel que $a \in \mathrm{acl}(B')$. Fixons un élément $b \in B'$; on a $a \in \mathrm{acl}((B' \setminus \{b\}) \cup \{b\}) \setminus \mathrm{acl}(B' \setminus b)$, donc $b \in \mathrm{acl}((B' \setminus \{b\}) \cup \{a\})$. On en déduit $B \subset \mathrm{acl}((B \setminus \{b\}) \cup \{a\})$, et donc que $\mathrm{acl}((B \setminus \{b\}) \cup \{a\} = E$.
On voudrait montrer que, de plus, $B \setminus \{b\} \cup \{a\}$ est indépendant :

- Si $a \in \mathrm{acl}(B \setminus \{b\})$ alors comme $b \in \mathrm{acl}((B \setminus \{b\}) \cup \{a\})$ on obtient $b \in \mathrm{acl}(B \setminus \{b\})$, ce qui contredit le fait que B est une base ;
- s'il existe $c \in B$ tel que $c \in \mathrm{acl}((B \setminus \{b, c\}) \cup \{a\})$ alors on obtient (en utilisant le point 5 et le fait que $c \notin \mathrm{acl}(B \setminus \{b, c\})$) que $a \in \mathrm{acl}(B \setminus b)$, et comme ci-dessus on obtient une contradiction.

On vient donc de montrer que $((B \setminus \{b\}) \cup \{a\})$ est une base de E. On peut répéter ce processus, et trouver pour tout $1 \le k \le n$ des éléments $b_1, \dots, b_k$ de B deux à deux distincts et tels que $(B \setminus \{b_1, \dots, b_k\}) \cup \{a_1, \dots, a_k\}$ soit une base de E. Au rang $k = n$, on obtient que $\{a_1, \dots, a_n\}$ est une base de E, ce qui contredit l'indépendance de $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$.
On vient de montrer que si B_1 est de cardinal n alors toute famille indépendante est de cardinal inférieur ou égal à n ; bien sûr il ne peut pas exister de base B' de cardinal strictemnt inférieur à n (sans quoi, en renversant les rôles de B et B', on obtiendrait que $|B|$ est strictement inférieur à n, ce qui est bien sûr absurde), autrement dit toutes les bases sont de même cardinal.
Si maintenant il existe une base dénombrable, ce qu'on a montré plus haut suffit à établir que toutes les autres bases sont aussi dénombrables (l'existence d'une base dénombrable exclut l'existence d'une base finie ou d'une base non dénombrable).

7. Il s'agit de l'exemple 9.1.1 des notes de cours. On peut sans perte de généralité supposer que $A = \emptyset$ (êtes-vous d'accord ? Si oui, sauriez-vous expliquer pourquoi ?). Soit alors $p(x)$ un 1-type algébrique. Remarquons déjà qu'alors $p(x)$ est réalisé dans $\mathcal{M}$ (puisque $p(x)$ est, comme tout type, réalisé dans une extension élémentaire, qu'un élément qui réalise $p(x)$ est par hypothèse algébrique, et que l'ensemble des éléments algébriques ne change pas quand on passe à une extension élémentaire de $\mathcal{M}$). Soit a un élément qui réalise $p(x)$; on sait qu'il existe une formule ϕ telle que $\mathcal{M} \models \phi(a)$ et $\phi(\mathcal{M})$ est fini. D'après le choix de ϕ, $\mathcal{M} \models \exists^{=m} x \phi(x)$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Parmi les possibilités de ϕ dans le type p, il en existe une qui est de cardinal minimal, en d'autres termes, pour ce choix de ϕ, le nombre m est minimal. Nous montrerons que cette formule isole $p(x)$. Soit alors $\psi(x) \in p(x)$. Comme $p(x)$ est consistant, $\neg\psi \notin p(x)$. Alors $|(\phi \wedge \neg\psi)(\mathcal{M})| < m$, et le choix minimal implique alors que $|(\phi \wedge \neg\psi)(\mathcal{M})| = 0$. En d'autres termes, $\mathcal{M} \models \forall x(\phi(x) \to \psi(x))$.

8. (i) Remarquons déjà qu'on peut supposer les e_{i_j} deux à deux distincts. Raisonnons par récurrence sur k, et traitons d'abord le cas $k = 1$. Soit $e \in B_1$ et $\theta(x)$ une formule telle que $\mathcal{M}_1 \models \theta(e)$. Alors, puisque $e \notin \mathrm{acl}(\emptyset)$, l'ensemble des $m \in M_1$ tel que $\mathcal{M}_1 \models \theta(m)$ est infini. Si pour un certain n l'ensemble $\theta(\mathcal{M}_2)$ était de cardinal

n, alors il en serait de même dans tout modèle de T, et ce n'est manifestement pas le cas (c'est faux dans $\mathcal{M}_1$). Comme T est fortement minimale, il en découle que $\theta(\mathcal{M}_2)$ est cofini, et donc pour tout $f \in B_2$ on a $\mathcal{M}_2 \models \theta(f)$. Les rôles de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ étant symétriques, on a prouvé l'équivalence recherchée dans le cas où $k = 1$.
Supposons maintenant la propriété désirée établie pour tout $i \leq k$, et soit θ une formule à exactement $k+1$ variables libres et $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}}) \in B_1^{k+1}$ tel que $\mathcal{M}_1 \models \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{k+1}})$. Considérons la formule à exactement k variables libres $\theta'(x_1, \ldots, x_k)$ définie par $\exists y \theta(x_1, \ldots, x_k, y)$. On a bien sûr $\mathcal{M}_1 \models \theta'(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ et donc, par récurrence, $\mathcal{M}_2 \models \theta'(\nu_0(e_{i_1}), \ldots, \nu_0(e_{i_k}))$. De plus, comme $e_{i_{k+1}}$ n'est pas dans $\mathrm{acl}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$, l'ensemble des $m \in M_1$ tels que $\mathcal{M}_1 \models \theta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, x)$ est nécessairement infini, et donc cofini (puisque T est fortement minimale). Mais alors par hypothèse de récurrence l'ensemble des $m' \in M_2$ tels que $\mathcal{M}_2 \models \theta(\nu_0(e_{i_1}), \ldots, \nu_0(e_{i_k}))$ est également cofini, et donc pour tout $f \in B_2$ qui n'est pas égal à l'un des $\nu_0(e_{i_j})$ $(1 \leq j \leq k)$ on a $\mathcal{M}_2 \models \theta(\nu_0(e_{i_1}), \ldots, \nu_0(e_{i_k}), f)$ (sinon f serait algébrique sur $\{\nu_0(e_{i_1}), \ldots, \nu_0(e_{i_k})\}$), ce qui prouve le résultat demandé.

(ii) Dans ce point, nous étendons l'application ν_0 du point précédent à un isomorphisme entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Le raisonnement est basé sur le fait que les types algébriques soient isolés. Il faut donc considérer ce point dans un même contexte que la proposition 9.2.5 et les corollaires 9.2.6 et 9.2.7 du cours.

D'après le point 3 (ii), les univers M_1 et M_2 de $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ respectivement ont même cardinal. En effet, $|M_1| = |M_2| = \max(\aleph_0, \kappa)$. Fixons alors une énumération de $M_1 = \{m_i \mid i < \lambda\}$ qui commence par les éléments de B_1. Nous ferons un raisonnement de "va". En général, un va n'est pas suffisant pour conclure que l'application obtenue est une surjection, mais dans notre cas, la minimalité forte et ses conséquences nous permettront d'éviter d'assurer un retour. Vu le travail accompli, c'est bien mérité.

L'application ν_0 amorce la récurrence transfinie qui nous permettra de construire notre application que nous nous permettons d'appeler ν. Supposons qu'une application ν ait déjà été construite pour

$$M_\alpha = \{m_i \mid i < \alpha\} .$$

Le type $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_1}(m_\alpha / M_\alpha)$ est algébrique puisque $m_\alpha \in \mathrm{acl}(B_1)$. Il est donc isolé par une $\mathcal{L}(M_\alpha)$-formule $\sigma_\alpha(x; m_{i_1}, \ldots, m_{i_l})$ avec $\max\{i_1, \ldots, i_l\} < \alpha$. Alors, la $\mathcal{L}(\nu(M_\alpha))$-formule $\sigma_\alpha(x; \nu(m_{i_1}), \ldots, \nu(m_{i_l}))$ est satisfaite dans $\mathcal{M}_2$ par un élément de $M_2 \setminus \nu(M_\alpha)$ que nous décretons $\nu(m_\alpha)$. Cette même formule isole alors le type $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_2}(\nu(m_\alpha)/M_\alpha)$. Avant de procéder, soulignons que les deux dernières phrases contiennent certains détails qui restent à vérifier.

La récurrence décrite dans le paragraphe précédent donne un plongement élémentaire. Il reste à vérifier que cette construction sans "vient" est malgré tout une surjection. Soit donc, $y \in M_2$. Alors, le type $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}_2}(y/B_2)$ est isolé par une formule algébrique $\sigma(y; \nu(b_1), \ldots, \nu(b_k))$. Il en découle que

$$\mathcal{M}_1 \models \exists^{=m} x \ \sigma(x; b_1, \ldots, b_k) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}_2 \models \exists^{=m} x \ \sigma(x; \nu(b_1), \ldots, \nu(b_k))$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. La construction du paragraphe précédent montre que les m éléments dans M_1 sont tous des antécédents des éléments de M_2. Forcément, l'une de ces images est y.

(iii) Soit T une théorie fortement minimale dans un langage dénombrable et $\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2$ deux modèles de T de même cardinal $\kappa > \aleph_0$. Alors $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ admettent des bases B_1, B_2 de cardinal κ ; en particulier, il existe une bijection $\nu \colon B_1 \to B_2$ et la question précédente prouve que cette bijection s'étend en un isomorphisme de $\mathcal{M}_1$ sur $\mathcal{M}_2$, ce qui prouve que deux modèles non dénombrables de T de même cardinal sont isomorphes, autrement dit T est catégorique en tous les cardinaux non dénombrables.