Correction de l'exercice IV de la feuille 1.

Note : Ce qui suit n'est en aucun cas un exemple de rédaction correcte d'une solution de l'exercice ; le but est plutôt de vous donner des pistes pour résoudre l'exercice, après quoi c'est à vous d'assembler les morceaux et d'obtenir une preuve complètement convaincante.

1) On veut prouver que, pour tous les ordinaux α, β tels que $\beta \leq \alpha$ il existe un ordinal γ tel que $\alpha = \beta + \gamma$.
Remarquons que l'on a $\beta + \alpha \geq \alpha$, donc l'ensemble d' ordinaux $\{\gamma \leq \alpha \colon \beta + \gamma \geq \alpha\}$ est non vide ; appelons γ_0 son plus petit élément (qu'on peut supposer > 0).
On a bien sûr $\beta + \gamma_0 \geq \alpha$. Alors si γ_0 est successeur on montre facilement qu'on doit avoir $\beta + \gamma_0 = \alpha$ (vérifiez-le !) ; il nous reste à considérer le cas où γ_0 est limite. On a alors, d'après les propriétés de l'addition vues à l'exercice précédent : $\beta + \gamma_0 = \sup_{\gamma < \gamma_0} \beta + \gamma$; de plus par définition de γ_0 on a $\beta + \gamma < \alpha$ pour tout $\gamma < \gamma_0$. On en déduit $\alpha \geq \sup_{\gamma < \gamma_0} \beta + \gamma = \beta + \gamma_0$, donc $\alpha = \beta + \gamma$.
Poser $\alpha \ominus \beta = \min\{\gamma \leq \alpha \colon \beta + \gamma \geq \alpha\}$ fournit donc une réponse à la quesiton posée.
Pour le contre-exemple demandé, on peut par exemple prendre $\beta = 1$, $\alpha = \omega$ (ou n'importe quel autre ordinal limite !).

2) C'est le même type de raisonnement : on commence par remarquer qu'il existe un certain γ_0 tel que $\alpha < \beta.\gamma_0$ (par exemple $\gamma_0 = \alpha + 1$ marche). On peut alors considérer $\gamma_1 = \min\{\gamma' \leq \gamma_0 \colon \beta.\gamma' > \alpha\}$. On vérifie en utilisant la définition du sup que γ_1 est successeur (inspirez-vous du raisonnement de la question précédente si vous n'y arrivez pas) ; on a donc $\gamma_1 = \gamma + 1$, et par définition on voit que γ satisfait $\beta.\gamma \leq \alpha < \beta.\gamma + \beta$; de plus les propriétés de monotonie de la multiplication à droite font qu'un tel γ est nécessairement unique.
Nous avons fait la moitié du travail ; il nous reste à obtenir $\delta < \beta$ tel que $\beta.\gamma + \delta = \alpha$. Cette fois encore l'unicité est claire (monotonie à droite de l'addition ordinale). Il suffit de poser $\delta = \alpha \ominus (\beta.\gamma)$; on a bien alors $\beta.\gamma + \delta = \alpha$, de plus $\delta \leq \beta$ à cause de la définition de $\ominus$ et le choix de γ fait qu'on ne peut pas avoir $\delta = \beta$.
Au final, on obtient bien qu'il existe un couple unique d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta\gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.