Correction de quelques exercices non traités, ou traités trop rapidement, en TD

Exercice III, feuille 8. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non ω_1 complet sur l'ensemble (nécessairement infini) I ; par définition on peut trouver des ensembles I_j $(j < \omega)$ tels que $I_j \in \mathcal{U}$ et $\bigcap_{j<\omega} I_j = \emptyset$; on peut supposer que $I_0 = I$ et, quitte à remplacer chaque I_j par $\bigcap_{i \leq j} I_j$, que la suite (I_j) est décroissante pour l'inclusion. De plus, à cause de l'exercice ci-dessous, on peut supposer que toutes les structures $\mathcal{A}_i$ sont infinies. Pour tout $i \in I$, définissons $n_i = \max\{n\colon i \in I_n\}$. Alors n_i est bien défini pour tout $i \in I$, et pour tout n on voit que $\{i \in I\colon n_i \geq n\} = I_n \in \mathcal{U}$.
Construire une telle suite (n_i) était le noeud de la preuve ; pour tout i, fixons une injection

$$f_i\colon \mathcal{P}(\{0, \ldots, n_i\}) \to A_i \ .$$

A toute partie $A \subset \mathbb{N}$ on peut alors associer le représentant dans $\prod \mathcal{A}_i/\mathcal{U}$ de $(f_i(A \cap \{0, \ldots, n_i\}))_{i \in I}$. Si A et B sont deux parties distinctes et (par exemple) $n \in A \setminus B$ alors pour tout $i \in I_n$ on a $f_i(A) \neq f_i(B)$, et comme $I_n \in \mathcal{U}$ on voit que les classes de ces deux suites sont distinctes. On vient donc de construire $2^{\aleph_0}$ éléments de $\prod_{i \in I} A_i/\mathcal{U}$.

Exercice IV, feuille 8. (fait en TD, peut-être trop vite...)
Soit $\mathcal{B} = \prod \mathcal{B}_i/\mathcal{U}$, où les $\mathcal{B}_i$ sont des structures finies et $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre.
Si jamais il existe un entier n tel que $\{i\colon |B_i| \leq n\} \in \mathcal{U}$, alors B est de cardinal $\leq n$ (cf. le théorème 6.5 des notes de cours). Par conséquent dans la suite on peut supposer que pour tout n $\{i\colon |B_i| > n\} \in \mathcal{U}$.
On va maintenant définir une injection de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans B, ce qui prouvera que $|B| \geq 2^{\aleph_0}$. Pour cela, prenons $A \subset \mathbb{N}$; pour tout i il existe un plus grand n_i tel que $2^{n_i} \leq |B_i|$, autrement dit tel que $\mathcal{P}(\{0, \ldots, n_i - 1\})$ s'injecte dans B_i. Fixons alors une injection $f_i\colon \{0, \ldots, n_i - 1\} \to B_i$, puis définissons $f(A)$ comme la classe (dans $\prod \mathcal{B}_i/\mathcal{U}$) de $(f_i(A \cap \{0, \ldots, n_i\}))_{i \in I}$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que f est une injection : soit A, B deux parties distinctes de $\mathbb{N}$ et (par exemple) $n \in A \setminus B$. Alors pour tout i tel que $n_i > n$ on a $f_i(A) \neq f_i(B)$; mais commme on est dans le cas où $\{i \in I\colon n_i > n\} \in \mathcal{U}$, on voit que $f(A) \neq f(B)$. Par conséquent $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to B$ est une injection, ce qui finit la preuve.

Exercice VI, feuille 8. Soit T une théorie complète dans un langage dénombrable $\mathcal{L}$ telle que $|S_n(T)| \geq \aleph_1$. Remarquons déjà que comme $\mathcal{L}$ est dénombrable il n'ya que $\aleph_0$ $\mathcal{L}$-formules ; comme un n-type est un ensemble de formules (à au plus n variables libres) particulier, on voit tout de suite que pour toute théorie dans un langage dénombrable on a $|S_n(T)| \leq 2^{\aleph_0}$.
Essayons maintenant de prouver l'inégalité réciproque (qui est plus intéressante !) ; pour cela, appelons V l'ensemble formé par les $\mathcal{L}$-formules $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ qui sont contenues dans au moins $\aleph_1$ n-types distincts, puis considérons l'ensemble Φ formé par les n-types les que *toutes* les formules de p sont dans V. Alors on voit que $|S_n(T) \setminus \Phi| \leq \aleph_0$: en effet, il n'y a que $\aleph_0$ $\mathcal{L}$-formules, et une formule qui n'est pas dans V appartient au plus à $\aleph_0$ types distincts. Par conséquent il y a au plus $\aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0$ types qui contiennent une formule qui n'est pas dans V, ce qui revient exactement à dire que $|S_n(T) \setminus \Phi| \leq \aleph_0$. Pour que la suite de la preuve soit plus lisible, énonçons un lemme intermédiaire.

Lemme. Soit $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in V$. Il existe une formule $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $\phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \chi(x_1, \ldots, x_n)$ et $\phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg\chi(x_1, \ldots, x_n)$ appartiennent toutes les deux à V.

Preuve du Lemme. On sait qu'il existe deux n-types $p(x_1, \ldots, x_n), q(x_1, \ldots, x_n) \in \Phi$ distincts qui contiennent tous les deux $\phi(x_1, \ldots, x_n)$. Soit $\chi(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $\chi(x_1, \ldots, x_n) \in p(x_1, \ldots, x_n)$ et $\neg\chi(x_1, \ldots, x_n) \in q(x_1, \ldots, x_n)$. Alors $\phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \chi(x_1, \ldots, x_n) \in p(x_1, \ldots, x_n)$, donc comme toutes les formules de $p(x_1, \ldots, x_n)$ sont dans V on voit que $\phi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \chi(x_1, \ldots, x_n) \in V$; le même raisonnement (en remplaçant p par q...) montre que $\psi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg\chi(x_1, \ldots, x_n) \in V$. Ceci conclut la preuve du lemme. $\square$

Une fois le lemme prouvé, la preuve s'achève par une dichotomie (on plonge l'ensemble des branches infinies

d'un arbre binaire dans $S_n(T)$).
On peut utiliser le lemme pour construire une famille $(\phi_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ de $\mathcal{L}$-formules telles que, pour toute suite binaire $s \in 2^{<\omega}$, on ait :

- $\phi_s \in V$
- $T \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \big(\phi_s(x_1,\dots,x_n) \leftrightarrow (\phi_{s-0}(x_1,\dots,x_n) \vee \phi_{s-1}(x_1,\dots,x_n)\big)$
- $T \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \big(\neg \left(\phi_{s-0}(x_1,\dots,x_n) \wedge \phi_{s-1}(x_1,\dots,x_n)\right)\big)$

(On note $s-0$ pour la suite obtenue en ajoutant un 0 à la fin de s, de même pour $s-1$).
Alors toutes ces formules sont consistantes avec T (puisque V est formé de formules qui sont toutes consistantes avec T, car contenues dans des types de T) donc par compacité on voit que pour tout $s \in 2^{\omega}$ l'ensemble de formules $\{\phi_{s|_n} : n \in \mathbb{N}\}$ est consistant, et donc contenu dans un type p_s. La construction assure que si s et t sont deux suites binaires infinies alors p_s et p_t sont différents, donc l'application $s \mapsto p_s$ est une injection de 2^{ω} dans $S_n(T)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque sur le résultat de cet exercice. Si on utilise la topologie naturelle sur l'ensemble des n-types, alors $S_n(T)$ est un espace métrique compact ; et un résultat classique de topologie affirme qu'un espace métrique compact, s'il n'est pas (au plus) dénombrable, est de cardinal $2^{\aleph_0}$ (c'est par exemple une conséquence du théorème de Cantor-Bendixson). Plus généralement, un espace métrique complet non dénombrable est nécessairement de cardinal supérieur à $2^{\aleph_0}$. On voit ici que, même si l'hypothèse du continu n'a pas de raison d'être vraie pour des ensembles quelconques, elle est par contre vérifiée pour des ensembles "réguliers" (compacts, complets, boréliens dans un métrique complet séparable...) ; c'est là un des points de départ de la *théorie descriptive des ensembles*, qui s'intéresse en particulier à la structure des ensembles "définissables" dans les espaces métriques complets séparables.

Exercice VII, feuille 8. Cet exercice est assez similaire à l'exercice précédent, donc je vais me contenter de donner un schéma de preuve (à charge pour vous de rédiger la preuve en détail, comme entraînement et pour vérifier que vous avez compris la démonstration de l'exercice précédent) : supposons par l'absurde qu'il existe une formule $\phi(x_1,\dots,x_n)$ consistante avec T et qui n'est contenue dans aucun n-type principal. Soit $p(x_1,\dots,x_n)$ un type qui contient $\phi(x_1,\dots,x_n)$; il existe une formule $\psi(x_1,\dots,x_n)$ de $p(x_1,\dots,x_n)$ qui n'est pas une conséquence de $\phi(x_1,\dots,x_n)$ (puisque p n'est pas principal) et donc $\phi(x_1,\dots,x_n) \wedge \psi(x_1,\dots,x_n)$ et $\phi(x_1,\dots,x_n) \wedge \neg\psi(x_1,\dots,x_n)$ sont toutes deux consistantes avec T. De plus, ces deux formules ne sont contenues dans aucun n-type principal (puisque sinon $\phi(x_1,\dots,x_n)$, qui est une conséquence de chacune de ces deux formules, serait aussi contenue dans un type principal).
Mais alors on peut faire une construction similaire à celle de l'exercice précédent, et obtenir une famille $(\phi_s)_{s\in 2^{<\omega}}$ de $\mathcal{L}$-formules consistantes avec T telles que, pour toute suite binaire finie s :

- ϕ_s n'est contenue dans aucun type principal
- $T \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \ \big(\phi_{s-0}(x_1,\dots,x_n) \to \phi_s(x_1,\dots,x_n)\big)$
- $T \vdash \ \big(\forall x_1 \dots \forall x_n \big(\phi_{s-1}(x_1,\dots,x_n) \to \phi_s(x_1,\dots,x_n)\big)$
- $T \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \big(\neg \left(\phi_{s-0}(x_1,\dots,x_n) \wedge \phi_{s-1}(x_1,\dots,x_n)\right)\big)$.

A partir de là, vous devriez être à même de conclure en vous inspirant de l'exercice précédent.

Exercice IV, feuille 9
(a) Une axiomatisation de la théorie T est obtenue en considérant les énoncés suivants :

- $\forall x \forall y \left(\big(R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)\big) \wedge \big(\neg R(x,x)\big)\right)$ (R est symétrique et irréflexive)
- $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_m \left(\bigwedge_{i\le n, j \le m} x_i \neq y_j\right) \to \left(\exists z \left(\left(\bigwedge_{1\le i\le n} R(x_i,z)\right) \wedge \left(\bigwedge_{1\le i\le m} \neg R(x,y_m)\right)\right)\right)$

  (On rajoute un énoncé pour toute paire (n,m) d'entiers naturels ; cet ensemble infini d'énoncés exprime le fait que, si X_1 et X_2 sont deux ensembles finis disjoints contenus dans un modèle de T, il exsiste un élément z de ce modèle qui est relié à tous les éléments de X_1 et à aucun élément de X_2).

(b) Soit $\mathcal{M}$ un modèle de T, et $A \subset M$ une partie finie. Alors il existe $z \in M$ tel que $\mathcal{M} \models R[(z,a)]$ pour tout $a \in A$, en particulier z n'appartient pas à A (la relation R est irréflexive) ; la partie A étant quelconque, ceci

prouve que M est infini.
Soient maintenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux modèles dénombrables de T ; on va appliquer la méthode de va-et-vient, résumée par le lemme suivant :
Lemme. Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ tels que pour tout (i, j) on ait

$$\mathcal{A} \models R[(a_i, a_j]) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models R[(b_i, b_j)] .$$

Alors pour tout $a \in A$ il existe $b \in B$ tel que $(a_1, \ldots, a_n, a)$ et $(b_1, \ldots, b_n, b)$ satisfont les mêmes conditions.
Je laisse en exercice le soin de démontrer ce lemme, qui ne devrait pas être trop difficile.

Une fois ce lemme démontré, on peut facilement construire un isomorphisme entre deux modèles dénombrables de T en utilisant la méthode de va-et-vient ; rappelons que pour cela on fixe deux énumérations (a_n) et (b_n) de A et B, puis on construit deux suites $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telles que
$\forall n \ x_{2n} = a_n$
$\forall n \ y_{2n+1} = b_n$
$\forall i, j \ \mathcal{A} \models R[(x_i, x_j)] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models R[(y_i, y_j)]$.
Alors l'application $f \colon A \to B$ définie par $f(x_i) = y_i$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$. Donc tous les modèles dénombrables de T sont isomorphes.
On déduit immédiatement que T est complète du fait que T est $\aleph_0$-catégorique (corollaire 6.2.2 des notes de cours).
(c) A cause du critère de va-et-vient établi en (b), on sait que deux éléments x et y ont même type sur A si, et seulement si on a, pour tout a dans A et tout i, $\mathcal{G} \models R[(x, a)] \Leftrightarrow \mathcal{G} \models R[(y, a)]$. Par conséquent, un 1-type $p(x)$ sur A est entièrement déterminé par
- Un sous-ensemble de A (l'ensemble des éléments avec qui x est en relation R) ; ce sont les types possibles pour les éléments qui n'appartiennent pas à A,

  ou bien
- la donnée d'un élément de A (chaque élément de a détermine un unique type principal sur a, l'ensemble des conséquences de la formule $x = c_a$).

L'axiomatisation de T permet de vérifier facilement que tous ces 1-types sont réalisés dans tous les modèles de T, autrement dit que tous les modèles de T sont ω-saturés.
(d) Ici on va décrire les k-types. Toujours grâce du critère de va-et-vient établi en (b), on voit que tout k-type sur T est en fait équivalent à un k-type sans quantificateurs (et donc T a la théorie d'élimination des quantificateurs) ; mais alors un k-type est en fait obtenu comme l'ensemble des conséquences (dans T) d'une formule $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ de la forme

$$\bigwedge_{i \sim j} (x_i = x_j) \wedge \bigwedge_{i \not\sim j} (x_i \neq x_j) \wedge \bigwedge_{(i,j) \notin B} (R(x_i, x_j)) \wedge \bigwedge_{(i,j) \in B} (\neg R(x_i, x_j)),$$

où B est symétrique, contient $\{(i, i) \colon 1 \leq i \leq k\}$, et $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\{1, \ldots, k\}$ ($\sim$ "dit" quels éléments sont égaux). En particulier, tous les k-types sont principaux ; d'autre part il est facile de vérifier que chaque formule ci-dessus est consistante avec T.
Pour compter les k-types, on commence par compter ceux où $x_i \neq x_j$ pour tout j (autrement dit, où $\sim$ est l'égalité) : on voit qu'il y en a autant que de graphes distincts dont l'ensemble de sommets est $\{1, \ldots, n\}$, et ce nombre est égal (pour $n \geq 1$) à $|\{(i, j) \colon 1 \leq i < j \leq k\}|$ (pour chacune de ces paires il faut choisir si on met une arête ou pas entre le i-ème sommet et le j-ième sommet). Il y a donc $2^{k(k-1)/2}$.
En général, pour tout $n \leq k$ il faut considérer l'ensemble des k-types tels qu'il y a seulement n éléments distincts. L'ensemble de relations d'équivalence qui doit être pris en compte est celui des relations d'équivalence à exactement n classes sur $\{1, \ldots, k\}$; le cardinal de cet ensemble est appelé *nombre de Stirling de deuxième espèce*, et noté $S(k, n)$. Pour chacune de ces relations on a exactement $2^{n(n-1)/2}$ types possibles, et on obtient donc la formule

$$|S_k(T)| = \sum_{n=1}^{k} 2^{n(n-1)/2} S(k, n) .$$

(on verra une autre formule plus bas)
(e) La description des 1-types sur une partie finie permet de voir qu'il y a $n + 2^n$ 1-types sur une partie de

cardinal n.
Pour calculer en général le cardinal de l'ensemble des k-types sur A, on utilise le fait que deux $(k+1)$-uplets $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ de G ont le même type sur A si, et seulement si, $tp_{\mathcal{G}}((x_1, \ldots, x_k)/A) = tp_{\mathcal{G}}((x_1, \ldots, x_k)/A)$ et $tp_{\mathcal{G}}(x_{k+1}/A \cup \{x_1, \ldots, x_k\}) = tp_{\mathcal{G}}(y_{k+1}/A \cup \{y_1, \ldots, y_k\})$ [1]. On peut vérifier (par récurrence, où en décrivant les k-types) que le nombre de k-types sur A ne dépend que de $|A|$ et, si l'on note $p(k,n)$ le nombre de k-types sur une partie de cardinal n, on obtient

- $p(k,0) = \sum_{n=1}^{k} 2^{k(k-1)/2} S(k,n)$;
- $\forall n \; p(1,n) = n + 2^n$;
- $\forall k \, \forall n \; p(k+1,n) = p(k,n).p(1,n+k)$.

De la troisième formule on tire que pour tout $k \geq 1$ on a $p(k,n) = p(1,n).p(1,n+1) \ldots p(1,n+k-1)$, d'où au final la formule suivante, valable pour tout k et tout $n \geq 1$:

$$p(k,n) = \prod_{i=0}^{k-1} \left(n + i + 2^{n+i}\right) \; .$$

Remarque. En utilisant le même type de méthode, on voit que $p(k,0) = p(k-1,0).p(1,k-1)$, ce dont on tire

$$|S_k(T)| = p(k,0) = \prod_{n=1}^{k-1} (n + 2^n) \; .$$

(f) Soit $A \subset G$ une partie dénombrable. Pour tout $B \subset A$, l'ensemble de $\mathcal{L}(A)$-formules à une variable libre $\{R(x, c_a) \colon a \in B\} \cup \{\neg R(x,a) \colon a \in A \setminus B\}$ est finiment consistant avec T, et donc (par compacité) consistant avec T. Par conséquent cet ensemble d'énoncés est contenu dans un 1-type q_B sur A. Si B et B' sont distinctes alors clairement $q_B \neq q_{B'}$, donc on vient de construire une injection de l'ensemble des parties de A dans $S_k^{\mathcal{G}}(A)$, ce qui prouve bien sûr que $|S_k^{\mathcal{G}}(A)| \geq 2^{\aleph_0}$. Comme A est dénombrable l'autre inégalité est claire (l'est-elle vraiment ?) et on obtient donc $|S_k^{\mathcal{G}}(A)| = 2^{\aleph_0}$ pour toute partie dénombrable $A \subset G$.

Retour sur cet exercice. L'unique modèle dénombrable de T est appelé le *graphe aléatoire* ; on peut le caractériser (à isomorphisme près) comme l'unique graphe G dénombrable *universel* (tout graphe fini - ou même dénombrable - est isomorphe à un sous-graphe de G) et *ultrahomogène* (tout isomorphisme partiel entre des sous-graphes finis de G s'étend en un isomorphisme de G tout entier). C'est un exemple de *limite de Fraïssé* d'une famille de structures finies du premier ordre. Le nom *graphe aléatoire* vient du fait que ce graphe à une construction probabiliste ; on peut construire un graphe dont l'ensemble de sommets est $\mathbb{N}$ de la façon suivante : pour toute paire (i,j) d'entiers distincts on lance (une fois par paire) une pièce de monnaie ; on décide que $R(i,j)$ est vraie si on obtient "'face"', fausse sinon. Alors le graphe obtenu est presque sûrement (c'est-à-dire : avec probabilité 1) isomorphe au graphe aléatoire.
Signalons enfin que ce graphe a une réalisation "concrète" (ou plutôt, explicite) issue de l'arithmétique : cette fois l'ensemble de sommets est l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 4, et on met deux tels entiers distincts p et q en relation si, et seulement si, p est un carré modulo q (où, de manière équivalente, q est un carré modulo p...).

[1] c'est un bon exercice !