Théorie des ensembles
Feuille 1.

I. *Quelques remarques élémentaires sur les ordinaux.*
Démontrer les assertions suivantes :
1) Un ordinal α est un entier naturel si, et seulement si, tout sous-ensemble non vide de α a un plus grand élément.
2) Si X est un ensemble d'ordinaux, alors $\cap X$ est un ordinal. De plus $\cap X$ est le plus petit élément de X.
3) Tout ensemble non vide d'ordinaux admet une borne supérieure (comment décrire explicitement celle-ci ?).
4) Montrer que si A est une partie d'un ordinal α, alors la relation d'appartenance définit sur A une relation de bon ordre, qui est isomorphe à un ordinal plus petit que α.

II. *Une autre définition de la somme ordinale.*
Soit I un ensemble ordonné par une relation d'ordre $<_I$, et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ordonnés ; on note $<_{\alpha_i}$ la relation d'ordre sur α_i.
On définit l'union disjointe $\sqcup_{i\in I}\alpha_i$ de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ par $\sqcup\alpha_i = \cup_{i\in I}\alpha_i \times \{i\}$. Puis on munit cet ensemble de l'ordre lexicographique : $(a,i) < (b,j)$ si et seulement si $\big(i <_I j$ ou $i = j$ et $a <_{\alpha_i} b\big)$.
1) Montrer que cela définit bien une relation d'ordre sur $\sqcup_{i\in I}\alpha_i$.
2) Montrer que si $<_I$ est un bon ordre, ainsi que tous les ordres $<_{\alpha_i}$, alors l'ordre construit est également un bon ordre.
Dans le cas où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille d'ordinaux, et où I est un ordinal, on appelle *somme ordinale* de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$, et on note $\sum_{i\in I}\alpha_i$, l'unique ordinal isomorphe au bon ordre ainsi construit. Si $I = 2$, on le note $\alpha_0 + \alpha_1$.
3)Montrer que l'addition ordinale est associative, non commutative, que 0 est élément neutre et que, pour tout ordinal α, $\alpha + 1$ est l'ordinal successeur $\alpha \cup \{\alpha\}$ de α.
4) Montrer la monotonie à droite, i.e $\beta < \beta' \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \beta'$
En déduire la régularité à gauche, i.e $\alpha + \beta = \alpha + \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$.
Enfin, montrer que la somme ordinale n'est pas monotone à gauche (au sens strict) ni régulière à droite, mais qu'on a : $\alpha \leq \alpha' \Rightarrow \alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$.
5) Montrer que la somme est la seule opération binaire sur les ordinaux vérifiant :
$\alpha + 0 = \alpha$; $\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$ (s est la fonction successeur) ;
$\alpha + \beta = \sup_{\gamma<\beta}(\alpha + \gamma)$ si β est un ordinal limite.
Pouvez-vous proposer une définition du produit d'ordinaux similaire à celle de cet exercice ?

III. *Se représenter les ordinaux.*
Dans chacun des cas suivants, trouver un ensemble A de nombres rationnels tel que $(A, \leq_{\mathbb{Q}})$ soit isomorphe à l'ordinal α :
$\alpha = \omega + 1$; $\alpha = \omega.2$; $\alpha = \omega^\omega$.

IV. *Une opération sur les ordinaux.*
1) Montrer que l'on peut définir une opération $\ominus$ sur les ordinaux telle que pour tous les ordinaux α, β on ait :
- $\alpha \ominus \beta = 0$ si $\alpha < \beta$
- $\beta + (\alpha \ominus \beta) = \alpha$ si $\alpha \geq \beta$.

Donner un exemple d'ordinaux $\alpha > \beta$ tels qu'il n'existe pas d'ordinal γ tel que $\gamma + \beta = \alpha$.
On rappelle que le produit de deux ordinaux $\alpha \cdot \beta$ est défini comme la somme de la famille constante égale à α, indexée par β : $\alpha \cdot \beta = \sum_{i<\beta}\alpha$.
2) Soient α et β deux ordinaux avec $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique couple d'ordinaux (γ, δ) tel que $\alpha = \beta \cdot \gamma + \delta$ et $\delta < \beta$.
(Indication : on pourra d'abord montrer qu'il existe γ' tel que $\alpha < \beta \cdot \gamma'$ et que le plus petit tel γ' est successeur).

V.*Diverses versions de l'axiome du choix.*
L'axiome du choix peut s'énoncer sous la forme suivante :
(AC) *Pour tout ensemble a dont les éléments sont non vides et disjoints deux à deux il existe un ensemble b dont l'intersection avec chacun des éléments de a est un singleton.*
Une *fonction de choix* sur un ensemble a est une application $\varphi\colon \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ telle que pour tout $x \subset a$ on ait $\varphi(x) \in x$.
On se place maintenant dans ZF ; montrer qu'alors AC est équivalent à chacun des énoncés suivants :
(a) Pour tout ensemble a il existe au moins une fonction de choix sur a.
(b) Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles non vides alors $\Pi_{i\in I} a_i$ est non vide.
(c) Pour tous les ensembles x, y et toute application surjective $g\colon x \to y$, il existe une application $h\colon y \to x$ telle que $g \circ h$ soit l'application identique de y dans y.

VI. *Théorème de Zermelo et lemme de Zorn.*
Soit E un ensemble. On considère l'ensemble Σ des couples $(A, \mathcal{R})$ où $A \subset E$ et $\mathcal{R}$ est une relation de bon ordre sur A. On dit que $(A, \mathcal{R})$ est inférieur à $(A^{'}, \mathcal{R}^{'})$, et on note $(A, \mathcal{R}) \leq (A^{'}, \mathcal{R}^{'})$, si A est un segment initial de $A^{'}$ (muni de $\mathcal{R}^{'}$) et la relation $\mathcal{R}^{'}$ induit sur A la relation $\mathcal{R}$.
1)Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur Σ.
2) Soit $(A_i, \mathcal{R}_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de Σ. On suppose que pour tout i et tout j de I $(A_i, \mathcal{R}_i)$ est comparable avec $(A_j, \mathcal{R}_j)$ pour $\leq$. Montrer qu'il existe une unique relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\cup_{i\in I} A_i$ qui, pour tout $i \in I$, induise $\mathcal{R}_i$ sur A_i.
3) Montrer que $(A, \mathcal{R}) \in \Sigma$ et qu'il est un majorant de la famille $(A_i, \mathcal{R}_i)_{i\in I}$.
4) Montrer que si $(A, \mathcal{R})$ est un élément maximal de Σ alos on a $A = E$.
5) Montrer que le lemme de Zorn implique le thórème de Zermelo.