Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2007/2008
Logique et théorie des ensembles

Théorie des modèles
Feuille 10.

Exercice I.
Soit T une théorie complète $\mathcal{M}$ un modèle de T et $a, b \in M$. Montrer que $tp^{\mathcal{M}}(a, b)$ est uniquement déterminé par $tp^{\mathcal{M}}(a)$ et $tp^{\mathcal{M}}(b/a)$.

Exercice II.
Deux structures ∞-équivalentes sont-elles nécessairement isomorphes ?

Exercice III. Soit T une théorie complète dans un langage $\mathcal{L}$ dénombrable. Montrer que T est $\aleph_0$-catégorique si, et seulement si, tous les modèles dénombrables de T sont saturés.

Exercice IV.
On considère la théorie T dans le langage $\{=\}$ qui dit "l'ensemble est infini". Que pouvez-vous dire sur cette théorie ? (types ? complétude ? élimination des quantificateurs ? modèles saturés ?)

Exercice V.
(a) Soit $\mathcal{L}$ un langage dénombrable et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure telle que $Th(\mathcal{M})$ soit $\aleph_0$-catégorique. On considère maintenant un langage $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$, et on appelle $\mathcal{M}_0$ le réduit de $\mathcal{M}$ au langage $\mathcal{L}_0$. Montrer que $Th(\mathcal{M}_0)$ est $\aleph_0$-catégorique.
(b) Plaçons-nous maintenant dans le langage des corps. Soit K un corps dont la théorie du premier ordre par rapport à ce langage est $\aleph_0$-catégorique. Montrer que K est fini.

Exercice VI.
Démontrer le corollaire 9.2.7 des notes de cours.

Exercice VII.
Soit Δ un ensemble de $\mathcal{L}$-formules clos sous $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. On note $S_n^{\Delta}(T)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Delta)$ formé par les sous-ensembles de Δ à au plus n variables libres qui sont consistants avec T et maximaux pour cette propriété (parmi les sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Delta)$.
(a) Montrer que si $p \in S_n^{\Delta}(T)$ alors il existe $q \in S_n(T)$ tel que $p \subset q$.
(b) Supposons que pour tout n et tout $p \in S_n^{\Delta}(T)$ il existe un unique $q \in S_n(T)$ tel que $p \subset q$. Montrer qu'alors pour toute $\mathcal{L}$-formule $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ (avec au moins une variable libre) il existe une formule $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$ avec les mêmes variables libres et telle que $T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \big(\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)\big)$.