Université Claude Bernard Lyon I — 2nd semestre 2007/2008
Master 1 — Logique et théorie des ensembles

Théorie des ensembles
Feuille 3.

I. *Une autre définition des cardinaux réguliers.*
(1) Montrer qu'un cardinal κ est régulier si, et seulement si, pour tout $\lambda < \kappa$ et toute famille $(X_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ d'ensembles tels que $|X_\alpha| < \kappa$, on a $|\cup X_\alpha| < \kappa$.
(2) Montrer que $\mathrm{cof}(\alpha)$ est le plus petit ordinal γ tel que α est la réunion de γ ensembles de cardinal strictement inférieur à $|\alpha|$.
(3) Montrer que tout cardinal successeur est régulier.
(4) Quelle est la cofinalité de $\aleph_{\omega+\omega}$? Plus généralement, si $\alpha > \omega$ est un ordinal, quelle est la cofinalité de $\aleph_\alpha$?
(5) On appelle *faiblement inaccessible* un cardinal non dénombrable à la fois limite et régulier. Montrer qu'un tel cardinal α doit vérifier $\alpha = \aleph_\alpha$. La réciproque est-elle vraie ?
Commentaire. Dans ZFC on ne peut ni démontrer, ni réfuter, l'existence de cardinaux faiblement inaccessibles : c'est un exemple d'énoncé *indécidable.*

II. *Lemme de König.*
Soient $(\kappa_i)_{i\in I}$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ deux familles de cardinaux. On veut prouver que

$$\big(\forall i \ \kappa_i < \lambda_i\big) \Rightarrow \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$$

(1) Commencer par prouver que l'inégalité large est vraie.
(2) On veut montrer par l'absurde que l'inégalité est stricte. Supposons que ce n'est pas le cas ; alors, en utilisant la définition des opérations arithmétiques cardinales, on peut trouver deux familles d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ telles que :
- $|A_i| = \lambda_i$,
- $B_i \subset \prod_{i\in I} A_i$, $|B_i| = \kappa_i$, et
- $\cup_{i\in I} B_i = \Pi A_i$.

En repensant à la preuve du théorème de Cantor, obtenir une contradiction.
Question subsidiaire. Que peut-on dire si l'on suppose seulement $\kappa_i \leq \lambda_i$ pour tout $i \in I$?

III. *Calculs de cardinaux.*
(1) Soit κ un cardinal infini. Montrer que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
(2) Calculer $\displaystyle\prod_{0<\alpha<\omega_1} \alpha$.
(3) Montrer que $\displaystyle\prod_{n\in\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

IV. *Cofinalité de l'ensemble des parties de κ.*
1) Soit κ un cardinal infini, de cofinalité ρ. Montrer qu'il existe une famille croissante $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\rho}$ de cardinaux strictement inférieurs à κ tels que $\kappa = \sum_{\alpha<\rho} \kappa_\alpha$.
2) En utilisant le lemme de König, montrer que pour tout cardinal κ on a $\mathrm{cof}(2^\kappa) > \kappa$.
3) En déduire une restriction à la négation de l'hypothèse du continu.
Commentaire. Rappelons que l'hypothèse du continu dit que le cardinal de $\mathbb{R}$ est le premier cardinal non dénombrable ; autrement dit que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. L'exercice ci-dessus montre que $2^{\aleph_0}$ ne peut pas être de cofinalité ω ; par exemple, il est impossible que $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$. On peut montrer que cette restriction sur la cofinalité est le meilleur résultat qu'on peut démontrer dans ZFC. Plus précisément, il est possible de prouver que, pour tout

ordinal $\alpha \leq 2^{\aleph_0}$ dont la cofinalité est différente de ω, on peut ajouter à la théorie ZFC l'axiome "$2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$" ; la nouvelle théorie est alors non-contradictoire si la théorie ZFC l'est.

V. *La formule de Hausdorff.*

On veut montrer que, pour toute paire d'ordinaux (α, β), on a $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.\aleph_{\alpha+1}$.

(1) Prouver que cette formule est vraie pour $\alpha < \beta$.

On suppose maintenant $\beta \leq \alpha$; on remarque qu'il suffit de prouver que $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.\aleph_{\alpha+1}$.

(2) En utilisant le fait que $\aleph_{\alpha+1}$ est régulier, montrer que

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \bigcup_{\gamma \in \aleph_{\alpha+1}} \gamma^{\aleph_\beta} \ .$$

(3) Conclure.

(4) Utiliser cette formule pour montrer que, si $n \in \omega$, alors on a, pour tout ordinal β, l'égalité $\aleph_n^{\aleph_\beta} = \aleph_n.2^{\aleph_\beta}$.