Université Claude Bernard Lyon I
Master 1

2nd semestre 2007/2008
Logique et théorie des ensembles

Théorie des ensembles

Feuille 4

I. *Une brève introduction aux filtres.*
Soit X un ensemble quelconque. Un *filtre* sur X est une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que :

(i) $\mathcal{F}$ est stable par intersections finies ;

(ii) $(F \in \mathcal{F}$ et $F \subset G) \Rightarrow G \in \mathcal{F}$;

(iii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

On dit qu'un filtre $\mathcal{G}$ est *plus fin* qu'un autre filtre $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$; on dit que les deux filtres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *compatibles* s'il existe un filtre $\mathcal{H}$ qui est plus fin que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.
On en vient à la notion fondamentale d'*ultrafiltre* : un ultrafiltre est un filtre $\mathcal{U}$ tel qu'il n'existe pas de filtre strictement plus fin que $\mathcal{U}$.
(1) Montrer que, pour tout $x \in X$, l'ensemble $\mathcal{U}_x = \{F \subset X : x \in F\}$ est un ultrafiltre.
(2) Soit $\mathcal{U}$ un filtre. Montrer que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si, et seulement si, pour tout partie $A \subset X$ on a $(A \in \mathcal{U}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{U})$.
(3) Montrer, en utilisant l'axiome du choix, que pour tout filtre $\mathcal{F}$ il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$. A quelle condition cet ultrafiltre est-il unique ?

II. *Filtres sur un espace topologique.*
On suppose maintenant que X est un espace topologique ; si $x \in X$ on note $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x.
(1) Montrer que $\mathcal{V}_x$ est un filtre.
Si $\mathcal{F}$ est un filtre sur X, on dit que $x \in X$ est une *valheur d'adhérence* de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}_x$ sont compatibles ; on dit que $\mathcal{F}$ *converge vers* $x \in X$ si $\mathcal{F}$ est plus fin que $\mathcal{V}_x$.
(2) Montrer que si x est une valeur d'adhérence de $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $x \in \overline{F}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.
(3) Montrer que si x est une valeur d'adhérence de l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ alors en fait $\mathcal{U}$ converge vers x.
(4) Montrer avec l'axiome du choix que x est une valeur d'adhérence du filtre $\mathcal{F}$ si, et seulement si, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$ qui converge vers x.

III. *Filtre image par une application ; limite suivant un filtre.*
Dans cet exercice X, Y désignent deux ensembles et $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Pour toute fonction $f : X \to Y$, on définit le *filtre image* $f(\mathcal{F})$ par la formule suivante :

$$f(\mathcal{F}) = \{G \subset Y : \exists F \in \mathcal{F},\ f(F) \subset G\} .$$

(1) Montrer que $f(\mathcal{F})$ est bien un filtre ; prouver que le filtre image d'un ultrafiltre est un ultrafiltre.
Si X, Y sont de plus des espaces topologiques, on dit que f *converge* suivant $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ si le filtre $f(\mathcal{F})$ est convergent.
(2) Supposons maintenant que X est un ensemble quelconque, $Y = \{0, 1\}$, tous deux munis de la topologie discrète. Soit $A \subset X$; dire à quelle condition sa fonction caractéristique χ_A converge vers 0 (resp. vers 1) selon $\mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si, et seulement si, $\chi_A(\mathcal{F})$ converge pour tout $A \subset X$.
Supposons à présent qu'il existe une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'espaces topoloqiques tels que $X = \prod_{i \in I} X_i$, muni de la topologie produit. On note $\pi_i : X \to X_i$ la projection sur la i-ième coordonnée.
(3) Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Montrer que $\mathcal{F}$ est convergent si, et seulement si, $\pi_i(\mathcal{F})$ est convergent pour tout $i \in I$.

IV. *Filtres et compacité ; théorème de Tychonoff.*
On rappelle qu'un espace topologique séparé X est *compact* s'il satisfait les propriétés équivalentes suivantes :

(i) Pour tout recouvrement de X par une famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$, il existe une partie **finie** $J \subset I$ telle que $X = \cup_{i\in J} O_i$.

(ii) Si $(F_i)_{i\in I}$ a la propriété d'intersections finies non vides, alors $\cap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

(1) Etant donné un espace topologique séparé X, montrer (avec l'axiome du choix) que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) X est compact

(b) Tout filtre $\mathcal{F}$ sur X admet une valeur d'adhérence

(c) Tout ultrafiltre sur X est convergent.

(2) En déduire une preuve (avec l'axiome du choix) du théorème de Tychonoff : tout produit d'espaces compacts est compact.
(3) Dans le cas particulier où chaque X_i est un espace métrique compact et où $I = \mathbb{N}$, utiliser le procédé diagonal pour prouver que $\Pi_{i\in\mathbb{N}} X_i$ est compact.