Théorie des ensembles
Feuille 5.

Dans toute cette feuille κ désigne un cardinal non dénombrable et régulier.

I. *Deux exemples de clubs.*
On considère une fonction $f\colon \kappa \to \kappa$.

(a) Montrer que $\{\alpha < \kappa \colon \forall \xi < \alpha\, f(\xi) < \alpha\}$ est un club.

(b) On suppose en plus que f est strictement croissante et continue aux ordinaux limite, c'est-à-dire que dès que $(\alpha_\xi)_{\xi<\lambda}$ est une suite strictement croissante d'éléments de κ (avec $\lambda < \kappa$) et $\alpha = \sup\{\alpha_\xi \colon \xi < \lambda\}$ on a $f(\alpha) = \sup\{f(\alpha_\xi) \colon \xi < \lambda\}$. Montrer qu'alors $\{x < \kappa \colon x = f(x)\}$ est un club.

II. *Un exemple d'ensemble stationnaire.*
On dit qu'un ordinal $\alpha < \kappa$ est une *limite de limites* s'il existe une suite strictement croissante d'ordinaux limite ayant α pour borne supérieure. Montrer que l'ensemble des limites de limites est stationnaire.

III. *Fonctions continues de ω_1 dans $\mathbb{R}$.*
On munit ω_1 de la *topologie de l'ordre*, c'est-à-dire la topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble des intervalles ouverts $I_{\alpha,\beta} = \{\gamma < \omega_1 \colon \alpha < \gamma < \beta\}$. On veut montrer que toute fonction continue $f\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ est éventuellement constante, i.e il existe $\gamma < \kappa$ tel que $f(\gamma') = f(\gamma)$ pour tout $\gamma' \geq \gamma$. On fixe $n \in \mathbb{N}$.
Remarque : Une fonction $f\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si elle est continue aux ordinaux limites.

(a) Montrer que pour tout $\gamma > 0$ il existe $\alpha < \gamma$ tel que :

$$\forall \beta\ \big(\alpha < \beta < \gamma\big) \Rightarrow |f(\beta) - f(\gamma)| < 2^{-n-1}\ . \tag{1}$$

(b) Pour tout $\gamma \neq 0$ on appelle $g(\gamma)$ le plus petit $\alpha < \gamma$ tel que (1) est vérifiée. En utilisant la fonction g, montrer qu'il existe $\alpha_n < \omega_1$ et un ensemble non borné $X_n \subset \omega_1$ tel que pour tout $\gamma \in X_n$ on ait

$$\forall \beta\ \big(\alpha_n < \beta < \gamma\big) \Rightarrow |f(\beta) - f(\gamma)| < 2^{-n-1}\ .$$

(c) En déduire que pour tout $\gamma \geq \alpha_n + 1$ on a $|f(\alpha_n + 1) - f(\gamma)| < 2^{-n}$.

(d) Conclure.

On veut utiliser le résultat qu'on vient d'obtenir pour prouver qu'il n'existe pas de fonction strictement croissante de ω_1 dans $\mathbb{R}$.

(e) Montrer que l'ensemble $\{\alpha < \omega_1 \colon \alpha \text{ est limite}\}$ est de cardinal ω_1. En déduire que si $f\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ est croissante alors il existe $\alpha < \omega_1$ telle que f est continue sur $\{\beta < \omega_1 \colon \alpha \leq \beta\}$ (pour la topologie de l'ordre).

(f) Conclure.

IV. *L' hypothèse du théorème de Fodor est la bonne...*
On suppose que $X \subset \kappa$ n'est pas stationnaire. Montrer qu'il existe une fonction régressive $f\colon X \to \kappa$ telle que pour tout $\gamma < \kappa$ l'ensemble $\{\alpha \in X \colon f(\alpha) \leq \gamma\}$ est borné.

V. *Une jolie conséquence du théorème de Fodor.*
On définit $E^\kappa_\omega = \{\alpha < \kappa \colon \mathrm{cof}(\alpha) = \omega\}$. Rappelons que vous avez démontré en DM que E^κ_ω est stationnaire. Le but de l'exercice est de montrer que tout sous-ensemble stationnaire de E^κ_ω peut s'écrire comme la réunion de κ ensembles stationnaires disjoints. Pour tout $\alpha \in E^\kappa_\omega$, on commence par fixer une suite strictement croissante $(a^\alpha_n)_{n\in\omega}$ telle que $\sup\{a^\alpha_n \colon n \in \omega\} = \alpha$. Fixons maintenant un sous-ensemble stationnaire W de E^κ_ω.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que pour tout $\eta < \kappa$ l'ensemble $\{\alpha \in W \colon \eta \leq a^\alpha_n\}$ soit stationnaire.

(b) On fixe un des entiers n dont on a démontré l'existence au (a), et on considère la fonction $f \colon W \to \kappa$ définie par $f(\alpha) = a^\alpha_n$. En appliquant le lemme de Fodor, trouver κ ensembles stationnaires disjoints dont la réunion soit égale à W.

(c) Montrer que κ est la réunion de κ sous-ensembles stationnaires disjoints.

VI. *Un lemme de Solovay...*
Soit $S \subset \kappa$ un ensemble stationnaire tel que tout $\alpha \in S$ est un cardinal non dénombrable et régulier. On veut montrer que l'ensemble $T = \{\alpha \in S \colon S \cap \alpha \text{ n'est pas un sous-ensemble stationnaire de } \alpha\}$ est stationnaire. Pour cela, on procède en trois étapes.

(a) Si $C \subset \kappa$ est un club , on appelle C' l'ensemble des ordinaux qui sont des limites d'ordinaux de C. Montrer que $C' \subset C$, que C' est un club, et que $S \cap C' \neq \emptyset$.

(b) Soit α le plus petit élément de $S \cap C'$. En utlisant le fait que α est régulier, montrer que $C \cap \alpha$ est un club dans α, ainsi que $C' \cap \alpha$.

(c) Montrer que $S \cap \alpha$ n'est pas stationnaire dans α. Conclure.

VII. *Et le théorème qui l'accompagne.*
On veut maintenant démontrer que tout sous-ensemble stationnaire de κ est la réunion de κ sous-ensembles stationnaires disjoints. Pour tout cardinal régulier infini $\lambda < \kappa$ on pose $E^\kappa_\lambda = \{\alpha < \kappa \colon\ \mathrm{cof}(\alpha) = \lambda\}$. Vous avez vu en DM que cet ensemble est stationnaire ; on admet le résultat selon lequel chaque E^κ_λ est réunion de κ sous-ensembles stationnaires disjoints (la preuve est essentiellement la même que celle de l'exercice V). Fixons maintenant un ensemble A stationnaire dans κ.

(a) Montrer que si $\{\alpha \in A \colon\ \mathrm{cof}(\alpha) < \alpha\}$ est stationnaire alors A est la réunion de κ ensembles stationnaires disjoints. Dans la suite on suppose donc que $\{\alpha \in A \colon \alpha \text{ est un cardinal régulier}\}$ est stationnaire ; on définit
$$W = \{\alpha \in A \colon \alpha \text{ est un cardinal régulier et } A \cap \alpha \text{ n'est pas stationnaire}\}$$

(b) En utlisant l'exercice VI, montrer que W est stationnaire.

(c) Pour tout $\alpha \in W$ il existe une suite strictement croissante $(\beta^\alpha_\xi)_{\xi<\alpha}$ telle que $\beta^\alpha_\xi \notin W$ pour tout $\xi < \alpha$ et $\sup\{\beta^\alpha_\xi \colon \xi < \alpha\} = \alpha$. Montrer qu'il existe ξ tel que pour tout $\eta < \kappa$ l'ensemble $\{\alpha \in W \colon \beta^\alpha_\xi \geq \eta\}$ est stationnaire.
Indication. Penser à l'intersection diagonale de clubs... et utiliser l'exercice I(a).

(d) Conclure (inspirez-vous de l'exercice V).

Remarque : cet exercice est difficile (surtout la question (c)) et ne sera pas traité en TD. C'est un bon exercice pour se torturer les méninges, ce qui permet de bien mettre en place toutes les notions sur les clubs. Si vous avez passé du temps à chercher une solution sans trouver, et que vous êtes curieux/se, il y a une preuve p95 du livre "'Set Theory : The Third Millenium Edition"' de Thomas Jech, que vous pouvez trouver à la bibliothèque (ou dans mon bureau). Une grande partie de cette feuille de TD s'inspire directement du chapitre 8 de ce livre.