Université Claude Bernard Lyon I | 2nd semestre 2007/2008
Master 1 | Logique et théorie des ensembles

Théorie des modèles
Feuille 6.

I. Soit T une théorie complète. Montrer que si T a un modèle fini alors tous les modèles de T sont isomorphes. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose pas que T est complète ?

II. Montrer que la théorie des corps infinis n'est pas complète.

III. Soit $(I, <)$ un ensemble bien ordonné et $(\mathcal{M}_i)$ une famille de $\mathcal{L}$-structures telles que $i < j \Rightarrow \mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j$. Montrer qu'on peut construire une $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$, d'univers $M = \cup_{i \in I} M_i$, telle que pour tout $i \in I$ on ait $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}$.

IV. Montrer que deux ordre totaux denses sans extrémités sont élémentairement équivalents (dans le langage à une relation binaire $<$). En particulier, $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <)$.

V. Nous considérons un langage $\mathcal{L}$ comprenant une infinité dénombrable de symboles de relations binaires : $\mathcal{L} = \{E_i | i < \omega\}$.
1. Ecrire les énoncés qui disent que pour tout $i < \omega$, E_i est une relation d'équivalence, que E_0 n'a qu'une seule classe et que les classes de E_{i+1} sont obtenues en divisant chaque E_i-classe en exactement deux classes infinies.

2. Montrer que la structure suivante est un modèle dénombrable des énoncés du premier point :

$$\mathcal{M}_0 = (\{f \in 2^{\omega} | \text{il existe } i < \omega \text{ tel que pour tout } j \geq i,\ f(i) = f(j).\ \}\ ; E_i(x_1, x_2)\ (i < \omega))\ ,$$

où pour tout $i \in \omega$, $(\sigma_1, \sigma_2) \in E_i^{\mathcal{M}_0}$ si et seulement si $\sigma_1 \lceil i = \sigma_2 \lceil i$.

Le point 2 montre que les énoncés du premier point forment un ensemble consistant. Ces énoncés et leurs conséquences seront notés T.

3.(i) Montrer qu'il existe un modèle dénombrable $\mathcal{M}_\omega \models T$, extension de tous les $\mathcal{M}_i$ $(i < \omega)$ et dans lequel pour tout $\sigma \in M_\omega$ il existe une infinité de $\theta \in M_\omega$ tel que $\mathcal{M}_\omega \models E_i(\sigma, \theta)$ pour tout $i < \omega$.

Un modèle ayant la même propriété que $\mathcal{M}_\omega$ sera dit "riche" quel que soit son cardinal. Nous montrerons que deux modèles riches de T sont élémentairement équivalents.

(ii) Comme vous connaissez la notion d'extension élémentaire et que vous aurez vu la preuve du théorème de Löwenheim-Skolem ascendant avant d'aborder cet exercice, démontrez l'énoncé suivant :

tout modèle de T a une extension élémentaire riche de même cardinal que lui.

4. Cette étape est une illustration de la méthode de va-et-vient en utilisant un modèle riche. Plus précisément nous effectuerons un "va", le "vient" étant symétrique. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux modèles dont $\mathcal{N}$ est riche. Fixons

$k \in \mathbb{N}$, supposons que $(a_1, \ldots, a_k)$ et $(b_1, \ldots, b_k)$ soient deux k-uplets extraits de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement et soumis aux conditions suivantes : pour toute paire (k_1, k_2) avec $1 \leq k_1, k_2 \leq k$, pour tout $i < \omega$,

1. $\mathcal{M} \models E_i(a_{k_1}, a_{k_2})$ si et seulement si $\mathcal{N} \models E_i(b_{k_1}, b_{k_2})$;
2. $a_{k_1} = a_{k_2}$ si et seulement si $b_{k_1} = b_{k_2}$.

Montrer que si $\alpha \in M$ est arbitrairement choisi alors il existe $\beta \in N$ tel que $(a_1, \ldots, a_k, \alpha)$ et $(b_1, \ldots, b_k, \beta)$ satisfassent les mêmes conditions.

5. Déduire du point (4) par une récurrence sur la complexité des formules que deux modèles riches de cardinaux arbitraires sont élémentairement équivalents. Conclure que T est une théorie complète.

6. Montrer qu'il n'y a à isomorphisme près qu'un seul modèle riche dénombrable.

7. Montrer que T élimine les quantificateurs : pour toute formule $\phi(x_1, \ldots, x_l)$ $(l \in \mathbb{N}^*)$ du premier ordre à exactement l variables dans le langage $\mathcal{L}$, il existe une formule $\psi(x_1, \ldots, x_l)$ avec les mêmes variables libres telle que $T \vdash \big(\forall x_1 \ldots x_l \psi(x_1, \ldots, x_l) \ \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_l)\big)$.